Universität Duisburg-Essen
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. G. Plonka-Hoch

SS 2010

Funktionalanalysis
(Blatt 6)

Aufgabe 1
Sei X ein linearer normierter Raum mit der Norm $\|.\|_X$.

a) Sei $\{x_n\}_{n\geq 1}$ eine Folge in X und sei die Summe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_{n+1} - x_n\|_X$ konvergent. Zeigen Sie, dass $\{x_n\}_{n\geq 1}$ eine Cauchyfolge ist.

b) Es seien $\{x_n\}_{n\geq 1}$ und $\{y_n\}_{n\geq 1}$ Cauchyfolgen in X.
Zeigen Sie, dass die Folge $c_n = \|x_n - y_n\|$ in $\mathbb{R}$ konvergiert. (4P.)

Aufgabe 2
Zeigen Sie: Ein linearer normierter Raum V ist genau dann vollständig (und damit ein Banachraum), wenn jede absolut konvergente Reihe (d.h. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_V < \infty$) in V einen Grenzwert $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ hat. (4P.)

Aufgabe 3
Sei $C^1[a,b]$ der Vektorraum der stetig differenzierbaren Funktionen auf dem abgeschlossenen Intervall $[a,b]$.

a) Ist $C^1[a,b]$ mit der Norm $\|f\|_\infty := \sup\limits_{t\in[a,b]} |f(t)|$ ein Banachraum?

b) Ist $C^1[a,b]$ mit der Norm

$$|||f||| := \sup_{t\in[a,b]} \max\{|f(t)|, |f'(t)|\} = \max\{\|f\|_\infty, \|f'\|_\infty\}$$

ein Banachraum? (5P.)

Aufgabe 4

a) Sei l_p, $1 \leq p < \infty$ der Folgenraum mit der Norm $\|\mathbf{x}\|_p = (\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p)^{1/p}$. Man zeige, dass sich nur für $p = 2$ ein Skalarprodukt auf l_p finden lässt mit $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|_p^2$ für alle $\mathbf{x} \in l_p$.

b) Sei $C[0,1]$ der lineare Raum aller stetigen Funktionen auf $[0,1]$ mit der Norm $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$. Man zeige, dass sich kein Skalarprodukt auf $C[0,1]$ finden lässt mit $(f,f) = \|f\|_\infty^2$ für alle $f \in C[0,1]$. (4P.)

Rückgabe: Montag, 07.06.2010 (in der Vorlesung)