Universität Duisburg-Essen
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. G. Plonka-Hoch SS 2010

Funktionalanalysis
(Blatt 7)

Aufgabe 1
Zeigen Sie, dass folgende Operatoren linear und beschränkt sind, und berechnen Sie die Normen:

a) $A : C[0,1] \to C[0,1], (Ax)(t) = \int\limits_0^t x(s)ds$

b) $A : C[0,1] \to C[0,1], (Ax)(t) = x(t)$

c) $A : C[0,1] \to C[0,1], (Ax)(t) = t^2 x(0)$

d) $A : C[0,1] \to C[0,1], (Ax)(t) = x(t^2)$ (3P.)

Aufgabe 2
Sei H ein Hilbertraum und $A : H \to H$ ein linearer und beschränkter Operator. Zeigen Sie:

$$\|A\| = \sup_{x,y \in H \setminus \{0\}} \frac{|\langle Ax, y\rangle|}{\|x\|\|y\|}. \qquad \text{(4P.)}$$

Aufgabe 3
Eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ werde als $(n \times m)$-Matrix $A = (a_{ij})_{i=1}^{n}\,{}_{j=1}^{m}$ darstellt. Zeigen Sie:

a) Sind $\mathbb{R}^m$ und $\mathbb{R}^n$ normierte Vektorräume mit $\|\mathbf{x}\|_1 := \sum_{i=1}^m |x_i|$ (bzw. $\|\mathbf{x}\|_1 := \sum_{i=1}^n |x_i|$), so ist

$$\|A\| = \max_{1 \le j \le m} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \qquad \text{(Spaltensummennorm)}.$$

b) Sind $\mathbb{R}^m$ und $\mathbb{R}^n$ normierte Vektorräume mit der Maximumsnorm $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_i |x_i|$, so ist

$$\|A\| = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^m |a_{ij}| \qquad \text{(Zeilensummennorm)}. \qquad \text{(4P.)}$$

Aufgabe 4
Die Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ definiere eine lineare Abbildung auf $\mathbb{R}^2$, wobei $\mathbb{R}^2$ mit der euklidischen Norm versehen ist. Man zeige

$$\|A\| = \frac{1}{2}\,(\sqrt{\tau + 2\delta} + \sqrt{\tau - 2\delta})$$

wobei $\tau = |a_{11}|^2 + |a_{12}|^2 + |a_{21}|^2 + |a_{22}|^2$ und $\delta = |a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}|$. (5P.)

Rückgabe: Montag, 14.06.2010 (in der Vorlesung)