Universität Duisburg-Essen SS 2006
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. G. Plonka-Hoch

Übungen Lineare Algebra II
(Blatt 1)

Aufgabe 1

Sei $n \geq 2$ und $V = \mathbb{R}^{n\times n}$ der Vektorraum aller $(n \times n)$-Matrizen.
Für $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^{n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sei $\operatorname{Sp}\mathbf{A} := a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$ die Summe der Hauptdiagonalelemente von $\mathbf{A}$ (Spur von $\mathbf{A}$). Untersuchen Sie, welche der folgenden Abbildungen $\varphi_i : V \times V \to \mathbb{R}, i = 1, 2$, Skalarprodukte in V sind:

a) $\varphi_1(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \operatorname{Sp}(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{B})$ für $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in V$.

b) $\varphi_2(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \operatorname{Sp}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$ für $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in V$. (5P)

Aufgabe 2

Es seien V ein Vektorraum über $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und φ eine Bilinearform auf V. Seien $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n \in V$. Zeigen Sie:
Ist $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^{n} \in K^{n\times n}$ mit $a_{ij} = \varphi(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j)$ regulär, so sind $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ linear unabhängig. (3P)

Aufgabe 3

Man zeige, dass für einen $\mathbb{R}$-Vektorraum V der folgende Zusammenhang zwischen Normen und Skalarprodukten gilt:

a) Ist $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein Skalarprodukt auf V mit zugehöriger Norm $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle\mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle}$, so gilt die *Parallelogramm-Gleichung*

$$\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|^2 + \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|^2 = 2\|\mathbf{v}\|^2 + 2\|\mathbf{w}\|^2.$$

b) Ist umgekehrt $\|\cdot\|$ eine Norm auf V, die die Parallelogramm-Gleichung erfüllt, so existiert ein Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ auf V mit $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle\mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle}$.

Hinweis zu b): Man definiere $\langle\mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle := \frac{1}{4}\left(\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|^2 - \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|^2\right)$ und zeige, dass

$$\langle\mathbf{v} + \mathbf{v}', \mathbf{w}\rangle = \langle\mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle + \langle\mathbf{v}', \mathbf{w}\rangle \quad \text{für alle} \quad \mathbf{v}, \mathbf{v}', \mathbf{w} \in V$$

gilt. Daraus folgere man $\langle\lambda\mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle = \lambda\langle\mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle$ zunächst für $\lambda \in \mathbb{Z}$, dann für $\lambda \in \mathbb{Q}$ und mit einem Stetigkeitsargument schließlich für $\lambda \in \mathbb{R}$. (6P)

Aufgabe 4

Für $x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ setzen wir $\|x\|_\infty := \max_{1\leq i\leq n} |x_i|$. Man zeige: $\|\cdot\|_\infty$ ist eine Norm auf $\mathbb{R}^n$, ist aber nicht die Norm eines Skalarproduktes auf $\mathbb{R}^n$. (3P)

Abgabetermin: Bis Montag, den 10.04.2006, 10.15 Uhr Briefkästen LE 4. Etage