

Übungen Lineare Algebra II (Blatt 10)

Aufgabe 1

Gibt es Matrizen $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ mit folgenden Eigenschaften ?

- a) $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ist normal, nicht diagonalisierbar, nicht orthogonal.
- b) $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ist diagonalisierbar, normal, nicht symmetrisch.
- c) $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ist diagonalisierbar, nicht normal, nicht symmetrisch.
- d) $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ist normal, nicht hermitisch, nicht unitär.

Geben Sie jeweils ein Beispiel an (mit Nachweis der Eigenschaften) oder zeigen Sie, dass eine solche Matrix nicht existieren kann! (6P)

Aufgabe 2

Es sei V_n ein n -dimensionaler unitärer Vektorraum über $\mathbb{C}$ und P ein normaler Endomorphismus auf V_n .

Zeigen Sie: Hat jeder Eigenwert λ von P den Absolutbetrag $|\lambda| = 1$, so ist P stets unitär. (6P)

Aufgabe 3

Man zeige: Jeder Endomorphismus f auf einem unitären oder euklidischen Vektorraum V , zu dem f^* existiert, kann auf genau eine Weise in der Form $f = f_1 + f_2$ dargestellt werden, wobei $f_1^* = f_1$ und $f_2^* = -f_2$ (d.h. f_1 ist selbstadjungiert und f_2 ist antiselbstadjungiert).

Es gilt:

$$f_1 = \frac{1}{2} (f + f^*) \quad , \quad f_2 = \frac{1}{2} (f - f^*). \quad (5P)$$

Aufgabe 4

Im Vektorraum V_3 der Polynome vom Grad ≤ 2 über $\mathbb{R}$ sei für $g_1, g_2 \in V_3$ das Skalarprodukt $\varphi(g_1, g_2) := \int_{-1}^{+1} g_1(x)g_2(x)dx$ eingeführt. Man bestimme die Matrix $\mathbf{A}_{f^*}$ des zum Ableitungsoperator

$$f(ax^2 + bx + c) := 2ax + b$$

adjungierten Operators f^* bezüglich der Basis $B : 1, x, x^2$ von V_3 .

(Hinweis: Man bestimme zunächst eine Matrix $\mathbf{C}$ mit $\varphi(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2) = (\mathbf{g}_1)_B^T \mathbf{C} (\mathbf{g}_2)_B$ und überlege sich, dass $\mathbf{A}_f^* = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{A}_f^T \mathbf{C}$.) (7P)

Abgabetermin: Bis Montag, den 03.07.2006, 10.15 Uhr Briefkästen LE 4. Etage