Universität Duisburg-Essen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. G. Plonka-Hoch SS 2006

Übungen Lineare Algebra II
(Blatt 2)

Aufgabe 1

Gegeben sei auf $V = \mathrm{span}(1, \mathrm{t}, \mathrm{t}^2, \mathrm{t}^3) \subset \mathbb{R}[\mathrm{t}]$ das Skalarprodukt

$$s(f,g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt.$$

a) Man bestimme die Matrix $\mathbf{S} = (s(f_i, f_j))_{i,j=1}^4$ wobei $f_1(t) = 1$, $f_2(t) = t,\ f_3(t) = t^2,\ f_4(t) = t^3$.

b) Man bestimme eine Orthonormalbasis von V. (5P)

Aufgabe 2

Sei V ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum. Man zeige: Sind $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ in V linear unabhängig, so ist die *Gramsche Matrix*

$$\mathbf{G}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n) := \begin{pmatrix} \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle & \ldots & \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_n \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_1 \rangle & \ldots & \langle \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_n \rangle \end{pmatrix}$$

positiv definit. (Eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt positiv definit, falls für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ gilt $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$.) (3P)

Aufgabe 3

Es sei $V := \mathbb{R}^3$ und φ die wie folgt definierte Abbildung von $V \times V$ in $\mathbb{R}$:

$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := 3x_1\ y_1 - x_1\ y_2 - x_2\ y_1 + x_2\ y_2 + 2x_3\ y_3$,

wobei $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T, \mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)^T$.

Man zeige, dass φ ein Skalarprodukt ist und bestimme eine bezüglich dieses Skalarproduktes orthonormierte Basis von V mit Hilfe des Schmidtschen Orthonormierungsverfahrens indem man von der Basis $\mathbf{a}_1 = (1,0,0)^T, \mathbf{a}_2 = (0,1,0)^T$, $\mathbf{a}_3 = (0,0,1)^T$ ausgeht. (4P)

Aufgabe 4

Man zeige für $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ die Grassmann-Identität

$$\mathbf{x} \times (\mathbf{y} \times \mathbf{z}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle \mathbf{y} - \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \mathbf{z}$$

und folgere daraus die Jacobi-Identität

$$\mathbf{x} \times (\mathbf{y} \times \mathbf{z}) + \mathbf{y} \times (\mathbf{z} \times \mathbf{x}) + \mathbf{z} \times (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) = 0.$$

Hinweis: Man betrachte zunächst die Fälle $\mathbf{z} = \mathbf{e}_1$, $\mathbf{z} = \mathbf{e}_2$ und $\mathbf{z} = \mathbf{e}_3$. Man beweise dann den allgemeinen Fall $\mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3)^T$ mit der Darstellung $\mathbf{z} = z_1\mathbf{e}_1 + z_2\mathbf{e}_2 + z_3\mathbf{e}_3$. (4P)

Abgabetermin: Bis Montag, den 24.04.2006, 10.15 Uhr Briefkästen LE 4. Etage