Universität Duisburg-Essen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. G. Plonka-Hoch SS 2006

Übungen Lineare Algebra II
(Blatt 4)

Aufgabe 1

Man stelle fest, ob die folgenden Abbildungen linear sind:

a) $f : K^{1\times 3} \mapsto K,\ (x, y, z) \mapsto y$

b) $f : K^{1\times 2} \mapsto K^{1\times 2},\ (x, y) \mapsto (y, x)$

c) $f : K^{1\times 3} \mapsto K^{1\times 3},\ (x, y, z) \mapsto (x, 1, z)$

d) $f : \mathbb{R}^{1\times 3} \mapsto \mathbb{R},\ (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 - z^2$ (4P)

Aufgabe 2

Sei f die durch $f(\mathbf{x})_B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x}_B$ definierte lineare Abbildung f von V in V, wobei $B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4)$ eine Basis von V bezeichnet. Wählt man anstelle von B die Basis

a) $B_1 = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_4)$, b) $B_2 = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4)$,

so existieren Matrizen $\mathbf{A}'_f$ und $\mathbf{A}''_f$ mit $f(\mathbf{x})_{B_1} = \mathbf{A}'_f \cdot \mathbf{x}_{B_1}$ bzw. $f(\mathbf{x})_{B_2} = \mathbf{A}''_f \cdot \mathbf{x}_{B_2}$.
Bestimmen Sie $\mathbf{A}'_f$ und $\mathbf{A}''_f$! (4P)

Aufgabe 3

Sei $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung und $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ bzw. $B' = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ eine Basis von $V = \mathbb{R}^3$ bzw. $W = \mathbb{R}^2$.
Es gelte $f(\mathbf{b}_1)_{B'} = \binom{2}{2}, f(\mathbf{b}_2)_{B'} = \binom{1}{2}, f(\mathbf{b}_3)_{B'} = \binom{4}{4}$.

a) Welchen Rang hat f?

b) Man gebe Ker f und def f an.

c) Man bestimme $f(\mathbf{c}_1), f(\mathbf{c}_2)$, dim $[\{f(\mathbf{c}_1), f(\mathbf{c}_2)\}]$, wobei
$$\mathbf{c}_1 = (3, 1, 0)^T_B, \mathbf{c}_2 = (6, 2, 1)^T_B.$$ (5P)

Aufgabe 4

Seien $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n \in V$ (V VR über K). Dann gibt es laut Vorlesung genau eine lineare Abbildung f mit $f : K^n \mapsto V$ und $f(\mathbf{e}_i) = \mathbf{a}_i$, $\mathbf{e}_i^T := (\underbrace{0, \ldots, 0}_{i-1}, 1, 0, \ldots, 0)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Man zeige:

a) f injektiv $\Longleftrightarrow \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ linear unabhängig

b) f surjektiv $\Longleftrightarrow \{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ ist Erzeugendensystem für V. (7P)

Abgabetermin: Bis Montag, den 15.05.2006, 10.15 Uhr Briefkästen LE 4. Etage