

Übungen Lineare Algebra II (Blatt 5)

Aufgabe 1

Sei $f(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \mathbf{x}$ eine lineare Abbildung von K^n in K^m , $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$. Man überprüfe die folgenden Aussagen:

- a) Ist die Summe der Komponenten jeder Zeile von $\mathbf{A}$ Null, so gilt $\text{rg } f \leq n - 1$.
- b) Ist die Summe der Komponenten jeder Spalte von $\mathbf{A}$ Null, so gilt $\text{def } f \geq 1$. (4P)

Aufgabe 2

Sei $V = \mathbb{R}^4$ und der Untervektorraum $W \subseteq V$ bestehe aus allen Vektoren der Gestalt $(x_1, x_1 + x_2, x_1 - x_2, x_2)^T$. Man bestimme:

- a) eine Basis B' von $V|_W$,
- b) eine Basis B von V und die darstellende Matrix $\mathbf{A}_f$ der linearen Abbildung $f : V \rightarrow V|_W$, die jeden Vektor $\mathbf{x} \in V$ auf seine Äquivalenzklasse $[\mathbf{x}] \in V|_W$, abbildet bezüglich B, B' ,
- c) einen zu $V|_W$ isomorphen Untervektorraum $W' \subseteq V$ mit $V = W \oplus W'$. (8P)

Aufgabe 3

Sei $\mathcal{B} = \{\sin, \cos, \sin \cdot \cos, \sin^2, \cos^2\}$ und $V := [\mathcal{B}] \subset \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Der Endomorphismus $F : V \rightarrow V$ sei gegeben durch $f \mapsto f'$ (dabei bezeichnet f' die erste Ableitung von f).

- (i) Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}$ eine Basis von V ist.
- (ii) Bestimmen Sie die darstellende Matrix $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(F)$.
- (iii) Bestimmen Sie den Rang und Defekt von F . (6P)

Aufgabe 4

Bestimmen Sie eine Basis von $\text{Ker } f_i$ und $\text{Im } f_i$ sowie Rang und Defekt von $f_i, i = 1, 2$.

$$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3, & (x, y) &\mapsto (x - y, y - x, x), \\ f_2 : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3, & (x, y, z) &\mapsto (2x + y + 3z, x + 4y - z, -7y + 5z) \end{aligned} \quad (2P)$$

Abgabetermin: Bis Montag, den 22.05.2006, 10.15 Uhr Briefkästen LE 4. Etage