Universität Duisburg-Essen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. G. Plonka-Hoch

SS 2006

Übungen Lineare Algebra II
(Blatt 7)

Aufgabe 1

Es sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ diagonalisierbar und

$$\det(\mathbf{I}_n + t \cdot \mathbf{A}) = 1 \qquad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Beweisen Sie, daß $\mathbf{A}$ die Nullmatrix ist! (4P)

Aufgabe 2

Sei $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$. Man beweise:

a) $\mathbf{A}$ und $\mathbf{A}^T$ haben das gleiche Spektrum. (2P)

b) Ist $\mathbf{A}$ eine orthogonale Matrix und λ ein Eigenwert von $\mathbf{A}$, dann ist $\lambda \neq 0$ und $1/\lambda$ ist ebenfalls ein Eigenwert von $\mathbf{A}$. (3P)

Aufgabe 3

Beweisen Sie:

Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine hermitische Matrix. Dann existiert eine unitäre Matrix $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mit

$$\overline{\mathbf{B}}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

wobei $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die Eigenwerte von $\mathbf{A}$ sind.

(7P)

Aufgabe 4

Es sei

$$\mathbf{A}_n = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 0 & \ldots & 0 \\ \beta_1 & \alpha_2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \beta_{n-1} \\ 0 & \ldots & 0 & \beta_{n-1} & \alpha_n \end{pmatrix}$$

eine symmetrische Tridiagonalmatrix. Man zeige, dass man durch

$P_0(t) := 1,$

$P_1(t) := \alpha_1 - t,$

$P_k(t) := (\alpha_k - t)P_{k-1}(t) - \beta_{k-1}^2 P_{k-2}(t), \quad k = 2, 3, \ldots, n,$

eine dreigliedrige Rekursion zur Berechnung des charakteristischen Polynoms $P_n(t) = \det(\mathbf{A}_n - t\,\mathbf{I}_n)$ erhält. (4P)

Abgabetermin: Bis Montag, den 12.06.2006, 10.15 Uhr Briefkästen LE 4. Etage