Hauptachsentransformation (Zusammenfassung)

Sei $\mathbf{A}$ eine symmetrische (n, n)-Matrix, $\mathbf{b}^T = (b_1, \ldots, b_n)$, S ein kartesisches Koordinatensystem des R_n und $(X)_S = (x_1, \ldots, x_n)^T =: \mathbf{x}$. Die Hyperfläche 2. Ordnung

$$T: \quad \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + 2\mathbf{b}^T \mathbf{x} + c = 0 \tag{1}$$

läßt sich durch maximal 2 Koordinatentransformationen in eine der folgenden Normalformen

(Ia) $\alpha_1 \, (x_1'')^2 + \alpha_2 \, (x_2'')^2 + \ldots + \alpha_n \, (x_n'')^2 = 0$

(Ib) $\alpha_1 \, (x_1'')^2 + \alpha_2 \, (x_2'')^2 + \ldots + \alpha_n \, (x_n'')^2 = 1$

(II) $\alpha_1 \, (x_1'')^2 + \ldots + \alpha_r \, (x_r'')^2 - 2 \, x_n'' = 0$

auf folgende Weise überführen:

1. Fall: $\operatorname{rg} \mathbf{A} = \operatorname{rg} (\mathbf{A}, -\mathbf{b})$.

1. Transformation: $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{x}'$.

$\mathbf{y}$ berechnet man aus $\mathbf{A}\mathbf{y} = -\mathbf{b}$. (1) geht dann über in

$$\mathbf{x}'^T \mathbf{A} \mathbf{x}' + c' = 0 \tag{2}$$

wobei $c' = \mathbf{b}^T \mathbf{y} + c$.

2. Transformation: $\mathbf{x}' = \mathbf{B} \, \mathbf{x}''$.

$\mathbf{B}$ ist eine orthogonale Matrix, deren Spalten orthonormierte EV zu den EW von $\mathbf{A}$ sind. (2) geht durch die 2. Transformation über in

$$(\mathbf{x}'')^T \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ & & \ddots & \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \mathbf{x}'' + c' = 0 \, , \tag{3}$$

wobei $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die EW von $\mathbf{A}$ sind. Für $c' = 0$ liegt eine Normalform des Typs Ia für T vor. Ist $c' \neq 0$, so liefert die Division durch $(-c')$ eine Normalform des Typs Ib.

2. Fall: $\operatorname{rg} \mathbf{A} =: r < \operatorname{rg} (\mathbf{A}, -\mathbf{b})$.

1. Transformation: $\mathbf{x} = \mathbf{B} \, \mathbf{x}'$.

$\mathbf{B} = (\underbrace{\mathbf{d}_1, \ldots, \mathbf{d}_r}, \underbrace{\mathbf{d}_{r+1}, \ldots, \mathbf{d}_{n-1}, \, \mathbf{d}_n})$

orthonormierte EV zu den von Null verschiedenen EW von $\mathbf{A}$	orthonormierte EV zum EW 0 von $\mathbf{A}$; die EV sind so gewählt, daß $\mathbf{b}^T \mathbf{d}_{r+1} = \ldots = \mathbf{b}^T \mathbf{d}_{n-1} = 0$ und $\mathbf{b}^T \mathbf{d}_n \neq 0$ gilt, d.h., $\mathbf{d}_{r+1}, \ldots, \mathbf{d}_n$ erhält man durch Anwendung des Schmidtschen ONV auf die Vektoren $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{n-r}$, wobei $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{n-r-1}$ linear unabhängige Lösungen von $\binom{\mathbf{A}}{\mathbf{b}^T} \mathbf{x} = \mathbf{0}$ und $\mathbf{a}_{n-r}$ eine Lösung $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$, aber keine von $\binom{\mathbf{A}}{\mathbf{b}^T} \, \mathbf{x} = \mathbf{0}$ ist

(1) geht durch die Transformation $\mathbf{x} = \mathbf{B}\,\mathbf{x}'$ über in

$$\mathbf{x}'^T \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & & \dots & & 0 \\ 0 & \ddots & & & & \vdots \\ & & \lambda_r & & & \\ \vdots & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & \dots & & & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{D}} \mathbf{x}' + 2\underbrace{(b_1', \dots, b_r', 0, \dots, 0, b_n')}_{\mathbf{b}'^T}\,\mathbf{x}' + c = 0, \qquad (4)$$

wobei $b_i' = \mathbf{b}^T\,\mathbf{d}_i, i = 1, \dots, r, n$.

2. Transformation: $\mathbf{x}' = \mathbf{y} + \mathbf{x}''$.

$\mathbf{y}$ berechnet man aus

$$\mathbf{D}\,\mathbf{y} + \mathbf{b}' = (0, \dots, 0, b_n')^T,$$

$$\mathbf{y}^T\mathbf{D}\mathbf{y} + 2\mathbf{b}'^T\mathbf{y} + c = 0.$$

Zum Beispiel kann man folgendes $\mathbf{y}$ verwenden:

$\mathbf{y} = (\frac{-b_1'}{\lambda_1}, \dots, \frac{-b_r'}{\lambda_r}, 0, \dots, 0, \frac{1}{2b_n'}(\frac{b_1'^2}{\lambda_1} + \dots + \frac{b_r'^2}{\lambda_r} - c))^T$.

(4) geht durch die 2. Transformation über in

$$(\mathbf{x}'')^T \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & & \dots & & 0 \\ 0 & \ddots & & & & \vdots \\ & & \lambda_r & & & \\ \vdots & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & \dots & & & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}'' + 2(0, \dots, 0, b_n')\,\mathbf{x}'' = 0 \qquad (5)$$

Division durch $-b_n'$ liefert eine Normalform des Typs II.