

10.3 Klassifikation der Kurven 2. Ordnung

Problem: Welche geometrischen Objekte werden durch eine Gleichung der Form

$$\underline{x}^T \underline{A} \underline{x} + 2 \underline{b}^T \underline{x} + c = 0 \quad (\text{mit } \underline{x} = (x, y)^T)$$

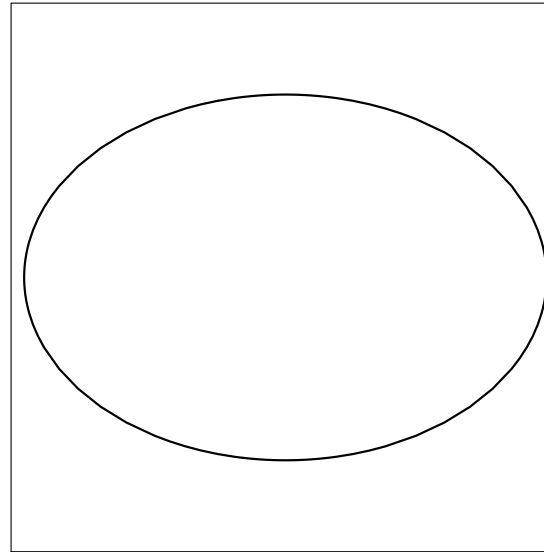
beschrieben? Nach dem Satz zur Hauptachsentransformation ist zu untersuchen:

Ia) $\alpha_1 x^2 + \alpha_2 y^2 = 0 \quad (\alpha_1, \alpha_2) \neq (0, 0)$

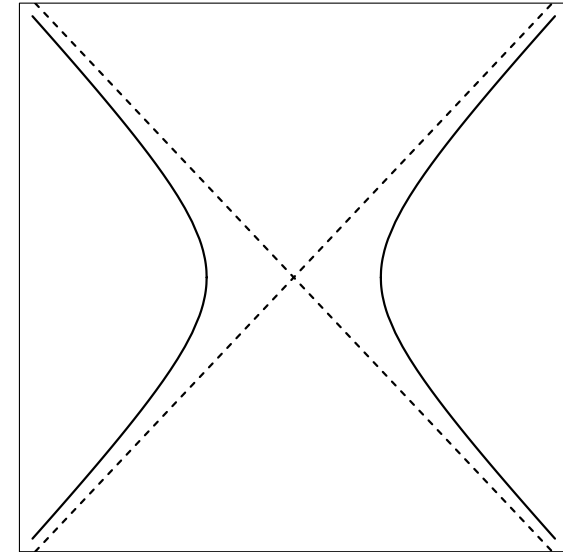
Ib) $\alpha_1 x^2 + \alpha_2 y^2 = 1 \quad (\alpha_1, \alpha_2) \neq (0, 0)$

II) $\alpha_1 x^2 - 2y = 0 \quad \alpha_1 \neq 0$

	α_1	α_2	Gleichung, Beschreibung
Ia)	+	0	$x^2 = 0$ Gerade
	+	+	$x = 0, y = 0$ Punkt
	+	-	$y = \pm \sqrt{ \alpha_1/\alpha_2 } x$ zwei Geraden
Ib)	+	0	$ \alpha_1 x^2 = 1$ zwei parallele Geraden
	-	0	imaginär, kein Punkt mit reellen Koordinaten erfüllt (Ib)
	+	+	$ \alpha_1 x^2 + \alpha_2 y^2 = 1$ Ellipse
	+	-	$ \alpha_1 x^2 - \alpha_2 y^2 = 1$ Hyperbel
	-	-	imaginär
II)	+	0	$ \alpha_1 x^2 - 2y = 0$ Parabel



Ellipse



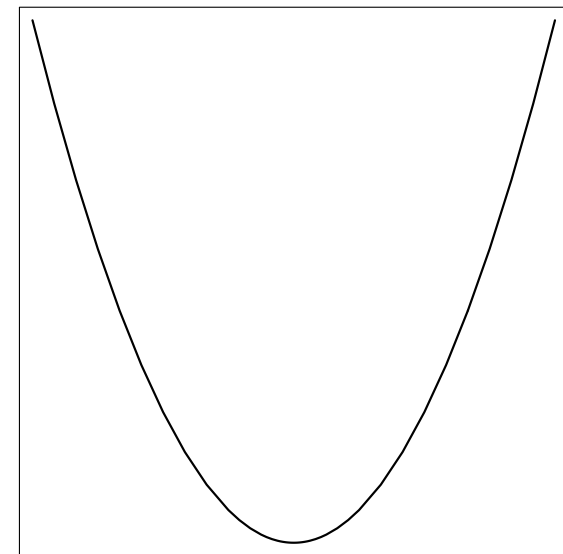
Hyperbel

Satz: Durch eine Gleichung der Form

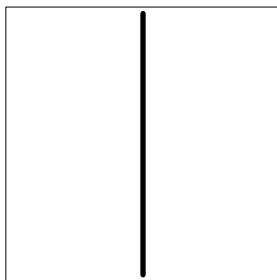
$$\underline{x}^T \underline{A} \underline{x} + 2 \underline{b}^T \underline{x} + c = 0 \quad (\underline{A} \neq \underline{0})$$

lassen sich genau folgende geometrische Gebilde im $\mathbb{R}^2$ beschreiben:

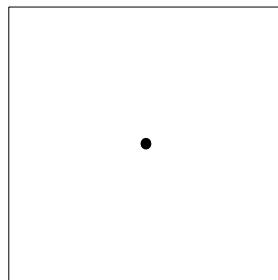
Leere Menge, Punkt, Gerade, 2 parallele Geraden, 2 sich schneidende Geraden, Ellipse, Hyperbel und Parabel.



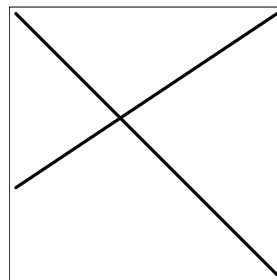
Parabel



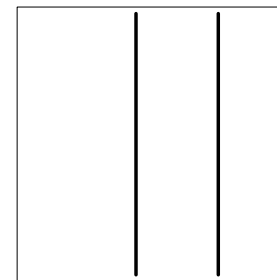
Gerade



Punkt



Zwei Geraden



Zwei parallele Geraden

10.4 Klassifikation der Flächen 2. Ordnung

Problem: Welche geometrischen Objekte werden durch eine Gleichung der Form

$$\underline{x}^T \underline{A} \underline{x} + 2 \underline{b}^T \underline{x} + c = 0 \quad (\text{mit } \underline{x} = (x, y, z)^T)$$

beschrieben? Nach dem Satz zur Hauptachsentransformation ist zu untersuchen:

Ia) $\alpha_1 x^2 + \alpha_2 y^2 + \alpha_3 z^2 = 0 \quad (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \neq (0, 0, 0)$

Ib) $\alpha_1 x^2 + \alpha_2 y^2 + \alpha_3 z^2 = 1 \quad (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \neq (0, 0, 0)$

II) $\alpha_1 x^2 + \alpha_2 y^2 - 2z = 0 \quad (\alpha_1, \alpha_2) \neq (0, 0)$

	α_1	α_2	α_3	Gleichung, Beschreibung
Ia)	+	+	0	$ \alpha_1 x^2 + \alpha_2 y^2 = 0 \Rightarrow (x, y) = (0, 0), z \text{ beliebig};$ Gerade
	+	+	+	$(x, y, z) = (0, 0, 0)$ Punkt
	+	0	0	$x^2 = 0$ $[(y, z)\text{-}]$ Ebene
	+	-	0	$ \alpha_1 x^2 - \alpha_2 y^2 = 0 \Rightarrow y = \pm \sqrt{ \alpha_1/\alpha_2 } x$ zwei sich schneidende Ebenen
	+	+	-	$ \alpha_1 x^2 + \alpha_2 y^2 - \alpha_3 z^2 = 0$ Kegel
Ib)	+	0	0	$\alpha_1 x^2 = 1$ zwei parallele Ebenen
	-	0	0	imaginär
	+	+	0	$ \alpha_1 x^2 + \alpha_2 y^2 = 1$ elliptischer Zylinder
	+	-	0	$ \alpha_1 x^2 - \alpha_2 y^2 = 1$ hyperbolischer Zylinder
	-	-	0	imaginär
	+	+	+	$ \alpha_1 x^2 + \alpha_2 y^2 + \alpha_3 z^2 = 1$ Ellipsoid
	+	+	-	$ \alpha_1 x^2 + \alpha_2 y^2 - \alpha_3 z^2 = 1$ einschaliges Hyperboloid
	+	-	-	$ \alpha_1 x^2 - \alpha_2 y^2 - \alpha_3 z^2 = 1$ zweischaliges Hyperboloid
	-	-	-	imaginär
II)	+	0	0	$ \alpha_1 x^2 - 2z = 0$ parabolischer Zylinder
	+	+	0	$ \alpha_1 x^2 + \alpha_2 y^2 - 2z = 0$ elliptisches Paraboloid
	-	+	0	$- \alpha_1 x^2 + \alpha_2 y^2 - 2z = 0$ hyperbolisches Paraboloid (Sattel)

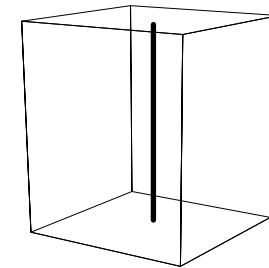
Satz: Durch eine Gleichung der Form

$$\underline{x}^T \underline{A} \underline{x} + 2 \underline{b}^T \underline{x} + c = 0 \quad (\underline{A} \neq \underline{0})$$

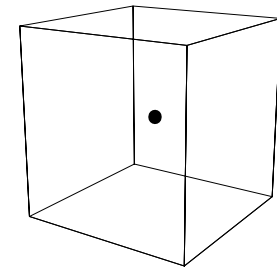
lassen sich genau folgende geometrische Objekte im $\mathbb{R}^3$ beschreiben:

Leere Menge, Punkt, Gerade, Ebene, 2 parallele Ebenen, 2 sich schneidende Ebenen, Kegel, elliptischer Zylinder, hyperbolischer Zylinder, Ellipsoid, einschaliges Hyperboloid, zweischaliges Hyperboloid, parabolischer Zylinder, elliptisches Paraboloid und hyperbolisches Paraboloid.

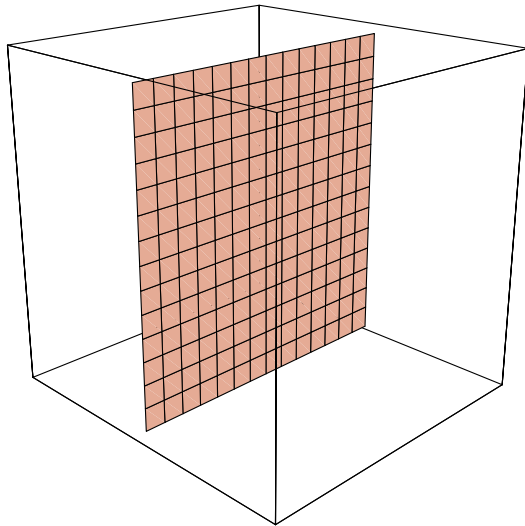
Nicht aufgeführte Fälle entstehen durch Vertauschung von x, y, z (bzw. im Fall (Ia) durch Multiplikation mit -1).



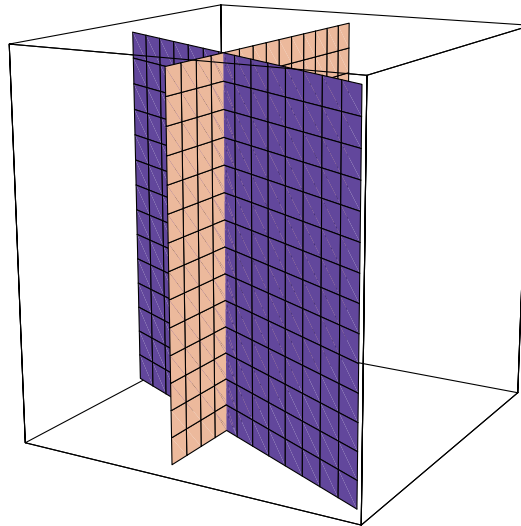
Gerade



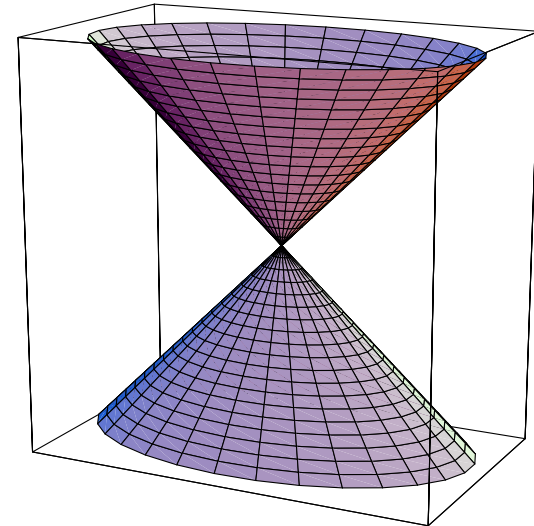
Punkt



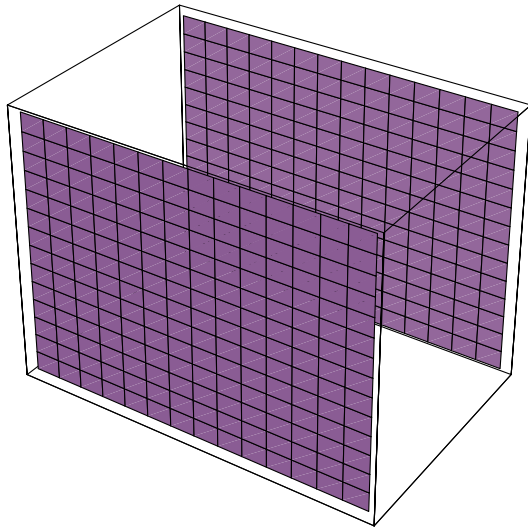
Ebene



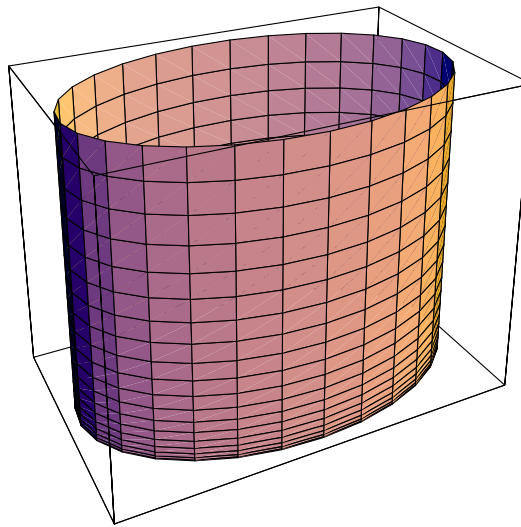
Zwei sich schneidende Ebenen



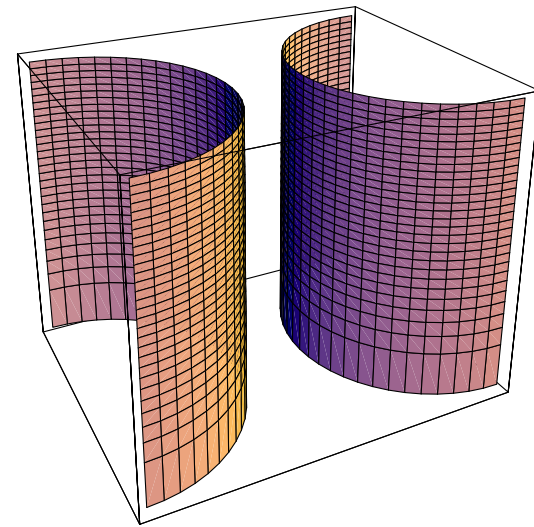
Kegel



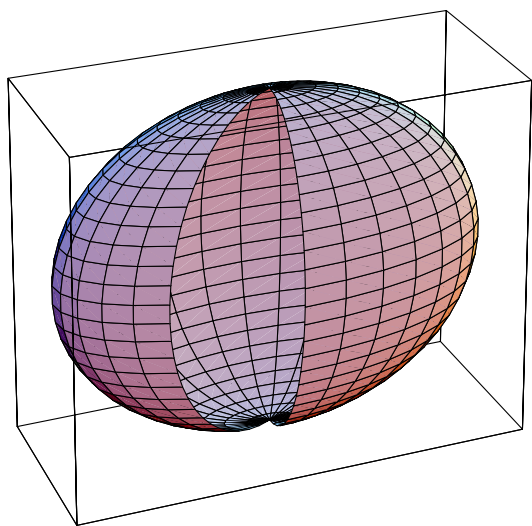
Zwei parallele Ebenen



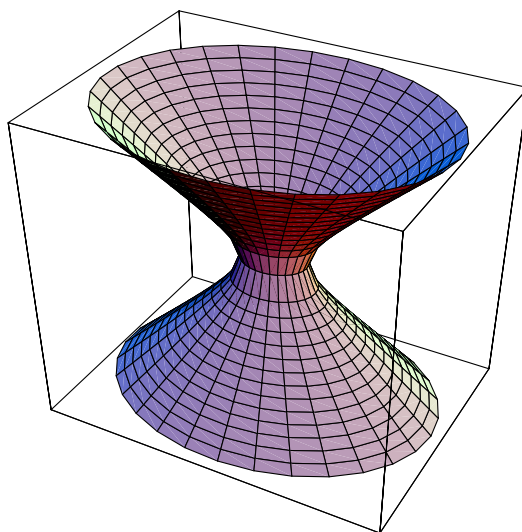
elliptischer Zylinder



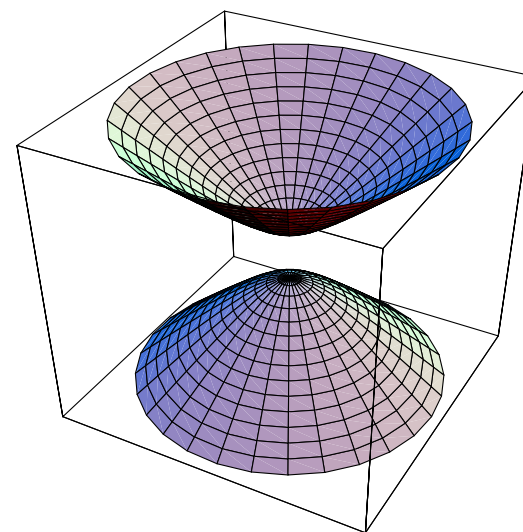
Hyperbolischer Zylinder



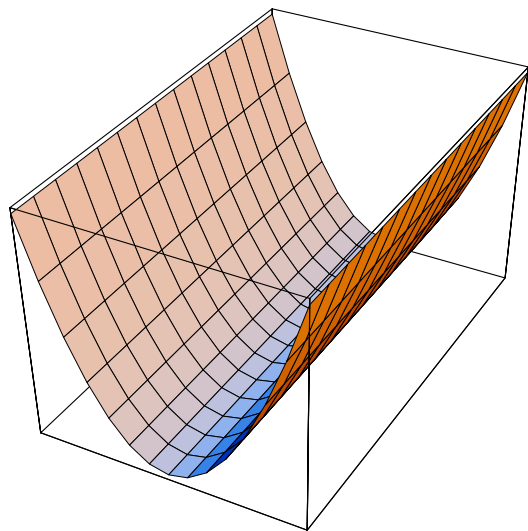
Ellipsoid



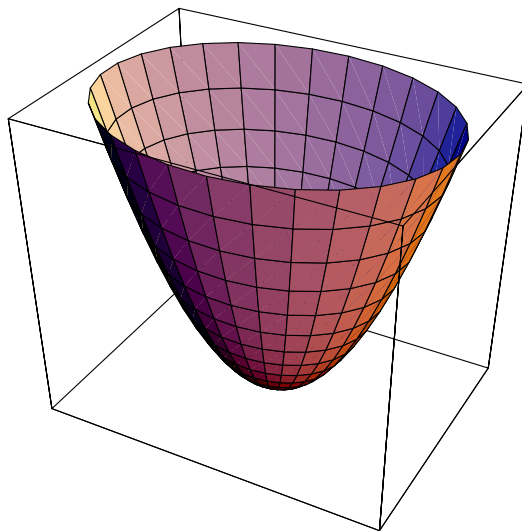
Einschaliges Hyperboloid



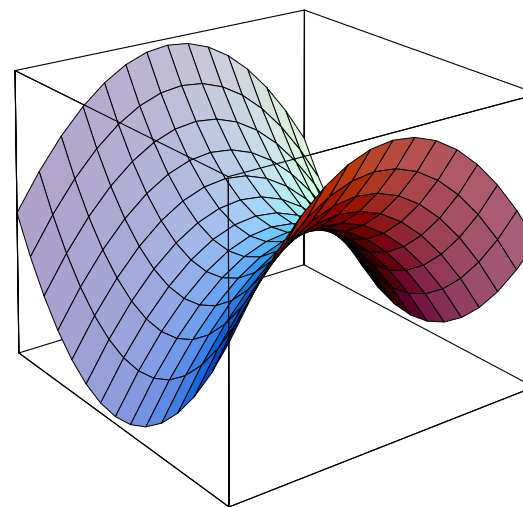
Zweischaliges Hyperboloid



Parabolischer Zylinder



Elliptisches Paraboloid



Hyperbolisches Paraboloid (Sattel)