

Testaufgaben für Lineare Algebra II

Stoffgebiet: Euklidische und unitäre Vektorräume

Aufgabe 1

- a) Mit dem Schmidtschen Orthonormierungsverfahren konstruiere man aus $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ (in dieser Reihenfolge) eine Orthonormalbasis des $\mathbb{C}^3$. Dabei ist

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} i \\ i \\ i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}.$$

- b) Man bestimme eine Basis für das orthogonale Komplement $U^\perp$ (bezüglich des Standardskalarproduktes) in $\mathbb{R}^4$ von

$$U = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}.$$

Stoffgebiet: Euklidische und unitäre affine Punkträume

Aufgabe 2

Es sei g_1 die Schnittgerade der Ebenen $x + y - z = 1$ und $2x + y - z = 2$ und g_2 sei die Schnittgerade der Ebenen $x + 2y - z = 2$ und $x + 2y + 2z + 4 = 0$ im $\mathbb{R}^3$. Man ermittle

- eine Parameterdarstellung des Lotes von g_1 und g_2 ,
- die Schnittpunkte F_1 und F_2 dieses Lotes mit g_1 und g_2 ,
- den Abstand von g_1 und g_2 .

Stoffgebiet: Lineare Abbildungen

Aufgabe 3

Sei $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ die folgendermaßen definierte Abbildung:

$$f : (x, y, z) \mapsto (x + 2y + z, y + z, -x + 3y + 4z).$$

(Hier ist $\mathbf{x} = (x, y, z)_B^T$ bezüglich der kanonischen Basis $B = \{(1, 0, 0)^T, (0, 1, 0)^T, (0, 0, 1)^T\}$ gewählt.)

Zeigen Sie, dass f eine lineare Abbildung ist!

Bestimmen Sie $\text{Ker}(f)$ und $\text{Im } f$! Geben Sie Basen von $\text{Ker}(f)$ und $\text{Im } f$ an!

Berechnen Sie die darstellende Matrix $\mathbf{A}'_f$ für die Basis

$$B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Stoffgebiet: Matrizen, Eigenwerte, Eigenvektoren

Aufgabe 4

a) Gegeben sei die Matrix

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Man überprüfe, ob $\mathbf{A}$ eine orthogonale Matrix ist!

- b) Es sei $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine Matrix mit $\mathbf{B} = -\overline{\mathbf{B}}^T$. Man zeige, dass alle Eigenwerte von $\mathbf{B}$ einen verschwindenden Realteil haben.
- c) Man gebe die Eigenwerte (mit Vielfachheiten) der unter a) angegebenen Matrix $\mathbf{A}$ an. (Hinweis: Man nutze b) aus.)

Aufgabe 5

Gegeben sei die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Man bestimme sowohl den Rang als auch alle vier Eigenwerte von $\mathbf{A}$! Welche Eigenvektoren gehören zu den von Null verschiedenen Eigenwerten von $\mathbf{A}$?

Aufgabe 6

Entscheiden Sie für die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

ob sie diagonalisierbar ist und geben Sie eine orthogonale Matrix $\mathbf{P}$ an, so dass $\mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P}$ eine Diagonalmatrix ist!

Aufgabe 7

Es seien $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{C}^{n \times n}$.

- a) Man beweise die Aussage:
Jeder Eigenwert von $\mathbf{A} \mathbf{B}$ ist auch Eigenwert von $\mathbf{B} \mathbf{A}$.
- b) Man widerlege die Aussage:
Jeder Eigenvektor von $\mathbf{A} \mathbf{B}$ ist auch Eigenvektor von $\mathbf{B} \mathbf{A}$.

Stoffgebiet: Hyperflächen zweiter Ordnung

Aufgabe 8

Bestimmen Sie die Normalform der Fläche 2. Ordnung des $\mathbb{R}_3$

$$T: x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_3^2 + 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3 = 0.$$

Um was für eine Punktmenge handelt es sich?

Stoffgebiet: Lineare Abbildungen in Vektorräumen mit Skalarprodukt

Aufgabe 9

a) Sind die Matrizen

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ i & 2i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & 2+i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$$

normal?

b) Es sei

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$$

normal. Zeigen Sie, dass dann $|b| = |c|$ gilt !

c) Zeigen Sie, dass alle normalen Matrizen aus $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ die Gestalt

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

haben.

Stoffgebiet: Normalformen von Endomorphismen

Aufgabe 10

Sei $f: \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ ein Endomorphismus mit

$$f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

Berechnen Sie die Jordansche Normalform von f und die zu dieser Normalform gehörende Basis von $\mathbb{C}^3$.