Universität Duisburg-Essen
Campus Duisburg
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. G. Plonka-Hoch

WS 2009/10

Übungen Numerische Mathematik I
(Blatt 1)

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass für die Vektornormen auf dem $\mathbb{R}^n$ die folgenden *scharfen* Abschätzungen gelten (d.h., es sind die Ungleichungen zu zeigen und spezielle Vektoren $\mathbf{x}$ anzugeben, für die die Gleichheit erfüllt ist):

$$\|\mathbf{x}\|_2 \leq \|\mathbf{x}\|_1 \leq \sqrt{n}\|\mathbf{x}\|_2,$$

$$\|\mathbf{x}\|_\infty \leq \|\mathbf{x}\|_1 \leq n\|\mathbf{x}\|_\infty,$$

$$\|\mathbf{x}\|_\infty \leq \|\mathbf{x}\|_2 \leq \sqrt{n}\|\mathbf{x}\|_\infty.$$

(6 Punkte)

Aufgabe 2

Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische, streng positiv definite Matrix. Man zeige, dass die Funktion $f(\mathbf{x}) = \sqrt{\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}}$ eine Vektornorm ist. (4 Punkte)

Aufgabe 3

Man zeige: Es gibt keine Matrixnorm mit der Eigenschaft $\|\mathbf{AB}\| = \|\mathbf{A}\|\,\|\mathbf{B}\|$ für alle $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $n \geq 2$. (2 Punkte)

Aufgabe 4

Zeigen Sie: Die Frobeniusnorm $\|\cdot\|_F$ ist mit der euklidischen Norm $\|\cdot\|_2$ verträglich, das heißt,

$$\|\mathbf{Ax}\|_2 \leq \|\mathbf{A}\|_F\,\|\mathbf{x}\|_2.$$

(4 Punkte)

<u>Abgabetermin:</u> 26.10.2009 (in der Vorlesung)