

Übungen Numerische Mathematik I
(Blatt 10)

Aufgabe 37

Zur Bestimmung von $\sqrt{5}$ wird die positive Nullstelle der Funktion $f(x) = x^2 - 5$ berechnet. Wir definieren folgende Fixpunktiterationen:

$$\begin{aligned} I_1 : x_k &= \Phi_1(x_{k-1}), & \Phi_1(x) &= 5 + x - x^2 \\ I_2 : x_k &= \Phi_2(x_{k-1}), & \Phi_2(x) &= 5/x \\ I_3 : x_k &= \Phi_3(x_{k-1}), & \Phi_3(x) &= 1 + x - x^2/5 \\ I_4 : x_k &= \Phi_4(x_{k-1}), & \Phi_4(x) &= \frac{1}{2}(x + \frac{5}{x}) \end{aligned}$$

- Zeigen Sie, dass für die Funktionen Φ_i ($i = 1, 2, 3, 4$) gilt
 $\Phi_i(x^*) = x^* \iff (x^*)^2 - 5 = 0$.
- Berechnen Sie für den Startwert $x_0 = 2.5$ jeweils x_1, \dots, x_6 .
- Zeigen Sie, dass das Verfahren I_3 lokal linear konvergiert und das Verfahren I_4 lokal quadratisch konvergiert. (5 Punkte)

Aufgabe 38

Gesucht ist eine Näherungslösung der nichtlinearen Gleichung $2x - \tan x = 0$ im Intervall $I = [1, 1.5]$. Überprüfen Sie, ob die Funktion $\phi_1(x) = \arctan 2x$ die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt. Führen Sie, ausgehend vom Startwert $x_0 = 1.2$ drei Iterationsschritte durch. Berechnen Sie mittels einer a-priori-Abschätzung, wieviele Iterationsschritte notwendig sind um eine Genauigkeit von 10^{-4} zu erreichen. (4 Punkte)

Aufgabe 39

Gesucht ist eine Näherungslösung der Gleichung

$$\frac{1}{4} \sin(\pi x) \cos(\pi x) = \frac{3x - 1}{3}$$

im Intervall $[0, 1]$. Zeigen Sie, dass die Lösung der Gleichung im Intervall $[0, 1]$ eindeutig ist, und geben Sie eine Fixpunktiteration an, die gegen diese Lösung konvergiert. Berechnen Sie die Lösung (z.B. mit Maple) mit einer Genauigkeit von mindestens 10^{-4} . (4 Punkte)

Aufgabe 40

Diskutieren Sie die Konvergenz des Newton-Verfahrens für die Funktion $f(x) = xe^{-x}$ für alle (zulässigen) positiven Startwerte. Für welche Startwerte $x_0 > 0$ konvergiert das Newton-Verfahren? (4 Punkte)

Abgabetermin: 11.01.2010 (in der Vorlesung)

Ich wünsche Ihnen ein frohes Weihnachtsfest und ein glückliches und erfolgreiches neues Jahr 2010!