

## Übungen Numerische Mathematik I (Blatt 11)

### Aufgabe 41

Bei einem aktuellen Bundesschatzbrief vom Typ B (Laufzeit 12/2009 bis 11/2016) erhält man für eine zu Beginn eingezahlte Summe von  $N$  Euro im ersten Jahr einen Zinssatz von 0.50 %, im zweiten Jahr 1.25 %, im dritten Jahr 2.00 %, im vierten Jahr 2.75 %, im fünften Jahr 3.50 % und im sechsten und siebten Jahr 4.00 %.

- a) Berechnen Sie mit Hilfe des Newtonverfahrens den effektiven Jahreszins  $p$  für den Bundesschatzbrief vom Typ B.
- b) Für welche Startwerte  $1 + p_0$  ist die Konvergenz des Newton-Verfahrens gesichert? (4 Punkte)

### Aufgabe 42

Gegeben sei eine Funktion  $f \in C^{m+1}(\mathbb{R})$  mit  $m$ -facher Nullstelle  $x^*$ . Zeigen Sie:

- a) Für  $m \geq 2$  konvergiert das Newton-Verfahren für Startwerte  $x_0$ , die hinreichend nahe bei  $x^*$  liegen, linear gegen  $x^*$ .
- b) Das "beschleunigte" Newton-Verfahren

$$x_{k+1} = x_k - m \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

konvergiert lokal quadratisch gegen  $x^*$ .

Hinweis: Entwickeln Sie  $f(x)$  und  $f'(x)$  um  $x^*$  in eine Taylor-Reihe mit Restglied. (5 Punkte)

### Aufgabe 43

Zeigen Sie, dass das skalare Newton-Verfahren, bei dem man die Ableitung  $f'(x)$  im Nenner durch einen Differenzenquotienten (mit  $h$  hinreichend klein und unabhängig von  $x_k$ ) ersetzt hat,

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{\frac{f(x_k+h) - f(x_k)}{h}},$$

im Allgemeinen (nur noch) die Konvergenzordnung 1 hat. (4 Punkte)

### Aufgabe 44

- a) Bestimmen Sie mit Hilfe des Bisektionsverfahrens Näherungen aller Nullstellen des Polynoms  $p(x) = x^3 - x + 0.3$  bis auf einen relativen Fehler von höchstens 10%.
- b) Berechnen (und skizzieren) Sie die ersten drei Iterationen des Sekantenverfahrens zur Berechnung der Nullstelle von  $p$  in  $[-2, -1]$ . Gehen Sie dabei von Startwerten  $x_0 = -2$ ,  $x_1 = -1$  aus. (4 Punkte)

Abgabetermin: 18.01.2010 (in der Vorlesung)