Übungen Numerische Mathematik I
(Blatt 2)

Aufgabe 5

Aus der Hilbertmatrix

$$\mathbf{H}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix}$$

entstehe die gestörte Matrix $\tilde{\mathbf{H}}_3$ indem $1/3$ durch $0,3333$ ersetzt wird. Bei vorgegebenem $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ sei $\mathbf{H}_3 \mathbf{x} = \mathbf{b}$ und $\tilde{\mathbf{H}}_3(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) = \mathbf{b}$. Man schätze $\|\Delta \mathbf{x}\|_\infty / \|\mathbf{x}\|_\infty$ nach Satz 2.9 der Vorlesung ab und vergleiche das Ergebnis mit dem tatsächlichen relativen Fehler für ein festes $\mathbf{b}$. (3 Punkte)

Aufgabe 6

Zeigen Sie: Die Menge der invertierbaren Matrizen ist offen in $\mathbb{R}^{n \times n}$, das heißt, für eine beliebige Matrixnorm $\|\cdot\|$, die mit einer passend gewählten Vektornorm verträglich ist, gilt:

Ist $\mathbf{A}$ invertierbar, dann gibt es ein $\delta > 0$ so dass auch $\mathbf{A} + \mathbf{E}$ invertierbar für alle $\mathbf{E} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $\|\mathbf{E}\| \leq \delta$. (4 Punkte)

Aufgabe 7

Sei $\mathbf{A} = (a_{jk})_{j,k=1}^n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $\det \mathbf{A} \neq 0$ und

$$\sum_{k=1}^n |a_{jk}| = 1 \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Weiter sei $\mathbf{D} = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ mit $\det \mathbf{D} \neq 0$.

Zeigen Sie, dass bezüglich der Zeilensummennorm für die Konditionszahl gilt:

$$\kappa(\mathbf{D} \mathbf{A}) \geq \kappa(\mathbf{A}).$$

(4 Punkte)

Aufgabe 8

Leiten Sie ein Verfahren zum Invertieren einer unteren Dreiecksmatrix $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ her und realisieren Sie es mit Hilfe einer Prozedur in Maple! (6 Punkte)

Abgabetermin: 02.11.2009 (in der Vorlesung)