

## Übungen Numerische Mathematik I (Blatt 3)

### Aufgabe 9

Bestimmen Sie mit Hilfe des in der Vorlesung hergeleiteten Gaußschen Eliminationsverfahrens ( $LU$ -Zerlegung) die Lösung des komplexwertigen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 2+i & 2 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 3+2i & 4 & 4 & 4 & \dots & 4 \\ 2 & 3 & 5+4i & 6 & 6 & \dots & 6 \\ 2 & 3 & 5 & 7+6i & 8 & \dots & 8 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 2 & 3 & 5 & 7 & & & 39+38i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ \vdots \\ z_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ 19 \end{pmatrix}$$

und vergleichen Sie diese mit dem Ergebnis der Maple-internen Prozedur LinearSolve. (5 Punkte)

### Aufgabe 10

Man zeige für eine nichtsinguläre  $(n \times n)$ -Matrix  $\mathbf{A}$  und Vektoren  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ :

a) Ist  $\mathbf{v}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{u} \neq -1$ , so gilt

$$(\mathbf{A} + \mathbf{u} \mathbf{v}^T)^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \frac{\mathbf{A}^{-1} \mathbf{u} \mathbf{v}^T \mathbf{A}^{-1}}{1 + \mathbf{v}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{u}}.$$

b) Ist  $\mathbf{v}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{u} = -1$  so ist  $(\mathbf{A} + \mathbf{u} \mathbf{v}^T)$  singulär. (4 Punkte)

### Aufgabe 11

Man zeige: Besitzt eine invertierbare Matrix  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine  $LU$ -Zerlegung  $\mathbf{A} = \mathbf{L} \mathbf{U}$ , wobei  $\mathbf{L}$  eine untere Dreiecksmatrix mit Einsen in der Diagonalen und  $\mathbf{U}$  eine obere Dreiecksmatrix ist, so ist diese Zerlegung eindeutig. (4 Punkte)

### Aufgabe 12

Für eine nichtsinguläre Matrix  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  sei eine  $LU$ -Zerlegung bekannt. Wie kann man daraus eine  $LU$ -Zerlegung einer Matrix

$$\mathbf{B} := \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c}^T & \gamma \end{pmatrix}, \quad \gamma \in \mathbb{R}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$$

mit Aufwand  $\mathcal{O}(n^2)$  berechnen? (4 Punkte)

Abgabetermin: 09.11.2009 (in der Vorlesung)