

Übungen Numerische Mathematik I
(Blatt 4)

Aufgabe 13

Implementieren Sie die Gauß-Elimination mit Totalpivotsuche und das zugehörige Lösungsverfahren in Maple. Geben Sie ein Beispiel eines Gleichungssystems an, bei dem die Totalpivotsuche signifikant besser abschneidet als die Spaltenpivotsuche.

(6 Punkte)

Aufgabe 14

Zeigen Sie: Wurde die LU -Zerlegung $\mathbf{PAQ} = \mathbf{LU}$ mittels Gauß-Elimination mit Totalpivotsuche ermittelt, dann ist

$$|\ell_{jj}| \geq |\ell_{kj}|, \quad k = j + 1, \dots, n \quad \text{und} \quad |u_{jj}| \geq |u_{jk}|, \quad k = j + 1, \dots, n$$

(4 Punkte)

Aufgabe 15

Zeigen Sie: Eine symmetrische Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist genau dann positiv definit, wenn $\det \mathbf{A}_m > 0$ für alle Hauptminoren $\mathbf{A}_m, m = 1, \dots, n$ von \mathbf{A} .

(4 Punkte)

Aufgabe 16

Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische, positiv definite Matrix. Auf \mathbf{A} werde der Gauß-Algorithmus ohne Pivotisierung angewendet. Nach k Eliminationschritten ist \mathbf{A} auf die Form

$$\mathbf{A}^{(k)} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11}^{(k)} & \mathbf{A}_{12}^{(k)} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22}^{(k)} \end{pmatrix}$$

mit $\mathbf{A}_{22}^{(k)} \in \mathbb{R}^{(N-k) \times (N-k)}$ reduziert.

Man zeige:

- a) $\mathbf{A}_{22}^{(k)}$ ist wieder positiv definit.
- b) $a_{ii}^{(k)} \leq a_{ii}^{(k-1)}$ für $k \leq i \leq N, k = 1, 2, \dots, N - 1$, wobei $a_{ii}^{(k)}$ die Diagonalelemente von $\mathbf{A}^{(k)}$ sind.

(4 Punkte)

Abgabetermin: 16.11.2009 (in der Vorlesung)