

Übungen Numerische Mathematik I
(Blatt 5)

Aufgabe 17

Zeigen Sie: Für $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist

$$\rho(\mathbf{A}) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \|\mathbf{A}^n\|^{1/n}.$$

(4 Punkte)

Aufgabe 18

Es sei $\mathbf{A} = (a_{jk})_{j,k=1}^n$ mit

$$a_{jk} = 1 \quad j, k = 1, \dots, n$$

gegeben. Bestimmen Sie das Spektrum $S(\mathbf{A})$!

(3 Punkte)

Aufgabe 19

Es sei die Abbildung

$$F(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b}$$

mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{5}{24} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

gegeben.

- Man berechne den Spektralradius von \mathbf{A} und überprüfe, ob F eine Kontraktion ist.
- Man berechne den Fixpunkt dieser Abbildung nach dem Banachschen Iterationsverfahren

$$\mathbf{x}^{(j+1)} = F(\mathbf{x}^{(j)}), \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

mit dem Startvektor $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$ mittels einer Maple-Prozedure. Man verwende als Abbruchkriterium $\|\mathbf{x}^{(j)} - \mathbf{x}^{(j-1)}\| \leq 10^{-6}$. (6 Punkte)

Aufgabe 20

Es sei $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Zeigen Sie:

- Ist $\rho(\mathbf{B}) < 1$, so ist $\mathbf{I} - \mathbf{B}$ invertierbar und lässt sich darstellen in der Form

$$(\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{I} + \mathbf{B} + \mathbf{B}^2 + \dots$$

- Ist $\mathbf{I} - \mathbf{B}$ invertierbar und in der obigen Form darstellbar, so gilt $\rho(\mathbf{B}) < 1$. (4 Punkte)

Abgabetermin: 23.11.2009 (in der Vorlesung)