Universität Duisburg-Essen
Campus Duisburg
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. G. Plonka-Hoch

WS 2009/10

Übungen Numerische Mathematik I
(Blatt 8)

Aufgabe 29

Die Funktion $f(x) = \cos(x)$, $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ soll durch Polynome n–ten Grades $P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$ für $n = 2, 3, 4, 5$ so approximiert werden, dass die Summe der Quadrate der Residuen an $N = 10$ äquidistanten Stützstellen minimal ist. Zur Berechnung der Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n$ verwende man eine Maple-Prozedur für das Gauß-Seidel-Verfahren. Wieviele Iterationsschritte benötigt man, um akzeptable Resultate (Toleranz 10^{-5}) zu erhalten? (6 Punkte)

Aufgabe 30

Berechnen Sie mit Hilfe von Maple die Kondition der in Aufgabe 29 auftretenden Matrizen $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ in den Normalengleichungen. (3 Punkte)

Aufgabe 31

Es sei gegeben

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0.01 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{b} + \Delta\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0.0101 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Lösen Sie die Ausgleichsprobleme

$$\|\mathbf{A}\mathbf{x}^* - \mathbf{b}\|_2 = \min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2} \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2 \quad \text{und} \quad \|\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{b}}\|_2 = \min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2} \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{b}}\|_2$$

über die Methode der Normalengleichungen.
b) Berechnen Sie die Kondition $\kappa_2(\mathbf{A}) := \sqrt{\kappa_2(\mathbf{A}^T\mathbf{A})}$ und $C := \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x}^*\|_2}{\|\mathbf{b}\|_2}$.
c) Zeigen Sie, dass in diesem Beispiel

$$\frac{\|\mathbf{x}^* - \tilde{\mathbf{x}}\|_2}{\|\mathbf{x}^*\|_2} \approx \frac{\kappa_2(\mathbf{A})}{C} \frac{\|\mathbf{b} - \tilde{\mathbf{b}}\|_2}{\|\mathbf{b}\|_2} \gg \kappa_2(\mathbf{A}) \frac{\|\mathbf{b} - \tilde{\mathbf{b}}\|_2}{\|\mathbf{b}\|_2}$$

gilt. Wie ist dies zu interpretieren? (4 Punkte)

Aufgabe 32

Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische Matrix mit Eigenwerten $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_n|$. Sei

$$\lambda^{(k)} := \frac{(\mathbf{x}^k)^T\,\mathbf{A}\mathbf{x}^k}{(\mathbf{x}^k)^T\,\mathbf{x}^k}$$

die durch Vektoriteration berechnete Annäherung von λ_1.
Zeigen Sie, dass $|\lambda^{(k)} - \lambda_1| = \mathcal{O}(|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}|^{2k})$ gilt. (5 Punkte)
Hinweis: Man nutze die Orthogonalität der Eigenvektoren einer symmetrischen Matrix aus.

Abgabetermin: 14.12.2009 (in der Vorlesung)