Universität Duisburg-Essen
Campus Duisburg
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. G. Plonka-Hoch

WS 2009/10

Übungen Numerische Mathematik I
(Blatt 9)

Aufgabe 33

Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\sigma(\mathbf{A})$ das Spektrum von $\mathbf{A}$. Man zeige
a) $\sigma(\mathbf{A}) = \sigma(\mathbf{A}^T)$.
b) $\sigma(\mathbf{A}^T\,\mathbf{A}) = \sigma(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)$. (3 Punkte)

Aufgabe 34

In der reellen Matrix

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} -9 & * & * & * & * \\ * & 0 & * & * & * \\ * & * & 1 & * & * \\ * & * & * & 4 & * \\ * & * & * & * & 21 \end{pmatrix}$$

stellen die Sterne Elemente vom Betrag $\leq 1/4$ dar. Die Vektoriteration werde mit $\mathbf{A}$ und dem Startvektor $\mathbf{y}_0 = (0,0,0,0,1)^T$ durchgeführt.
Zeigen Sie, dass der Startvektor $\mathbf{y}_0$ geeignet ist, d.h., dass die Folge $\mathbf{y}_k$ (mit $\mathbf{y}_{k+1} := \mathbf{A}\mathbf{y}_k/\|\mathbf{A}\mathbf{y}_k\|$ für $k = 0,1,2\ldots$) gegen den Eigenvektor zum betragsmäßig größten Eigenwert konvergiert. (5 Punkte)
Hinweis: Schätzen Sie die Eigenwerte von $\mathbf{A}$ mit dem Satz von Gershgorin ab.

Aufgabe 35

Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Tridiagonalmatrix mit $a_{i+1,i} = a$, $a_{i,i} = b$, $a_{i,i+1} = c$ für alle i, wobei $ac > 0$.
a) Verifizieren Sie durch Einsetzen, dass $\mathbf{A}\mathbf{v}^k = \lambda_k\,\mathbf{v}^k$ für $k = 1,\ldots,n$ gilt mit

$$\lambda_k = b + 2\mathrm{sign}(a)\,\sqrt{ac}\,\cos(\frac{k\pi}{n+1}), \quad v_i^k = (\frac{a}{c})^{(i-1)/2}\,\sin(\frac{k\pi i}{n+1}),$$

wobei $\mathbf{v}^k = (v_i^k)_{i=1}^n$.
b) Sei $a = c = -1$ und $b = 2$. Bestimmen Sie eine Formel für die Konditionszahl $\kappa(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\|_2\,\|\mathbf{A}^{-1}\|_2$ der Matrix $\mathbf{A}$ als Funktion von n. Berechnen Sie $\kappa(\mathbf{A})$ für $n = 100$ und $n = 1000$. (5 Punkte)

Aufgabe 36

Bestimmen Sie mit Hilfe von Householder-Transformationen die QR-Zerlegung der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Lösung des Problems $\|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2 = \min$ mit $\mathbf{b} = (1,1,2)^T$. Wie groß ist die minimale euklidische Norm des Residuums? (4 Punkte)

Abgabetermin: 21.12.2009 (in der Vorlesung)