

Übungen Numerische Analysis
(Blatt 10)

Aufgabe 37

Man zeige, dass die Bernsteinpolynome für $t \in \mathbb{R}$ die Identität

$$\sum_{k=0}^n \binom{k}{n}^2 b_k^n(t) = \frac{n-1}{n} t^2 + \frac{t}{n}, \quad n \in \mathbb{N}_0, n \geq 2$$

erfüllen! (3P.)

Aufgabe 38

Man zeige: Ein gegebenes Polynom p mit der Bézier-Darstellung

$$p(t) = \sum_{j=0}^n \beta_j^{(0)} b_j^n(t) \quad t \in [0, 1]$$

hat für ein festgelegtes $s \in (0, 1)$ auch die beiden Darstellungen

$$p(t) = \sum_{j=0}^n \beta_0^{(j)} b_j^n\left(\frac{t}{s}\right) \quad \text{für } t \in [0, s],$$
$$p(t) = \sum_{j=0}^n \beta_j^{(n-j)} b_j^n\left(\frac{t-s}{1-s}\right) \quad \text{für } t \in [s, 1].$$

Dabei sind $\beta_j^{(k)} = \beta_j^{(k)}(s)$ ($k = 0, \dots, n, j = 0, \dots, n-k$) die im Dreiecksschema des de Casteljau-Algorithmus auftretenden Zwischenwerte. (7P.)

Aufgabe 39

Vereinfachen Sie die Prozedur **subdiv** innerhalb der Prozedur **bezier** so, dass jeweils nur die Teilpolynome für $t = 1/2$ berechnet werden. Verwenden Sie Ihre neue Prozedur in der Prozedur **bezier** und wenden Sie sie auf die Beispiele

- a) $P := [[1, 2], [2, 6], [4, 4], [5, 3]]$
b) $P := [[1, 1], [3, 3], [2, -5], [-2, -3], [-1, 3]]$

und jeweils eine und sieben Iterationen an! Stellen Sie in der Graphik auch das ursprüngliche Kontrollpolygon dar! (4P.)

Aufgabe 40

Man gebe eine Formel für die Multiplikation zweier Polynome in Bézier-Form an.

Für $p(t) = \sum_{k=0}^n \beta_k b_k^n(t)$ und $q(t) = \sum_{j=0}^m \alpha_j b_j^m(t)$ finde man das Produkt in der

$$\text{Form } p(t) \cdot q(t) = \sum_{k=0}^{n+m} \gamma_k b_k^{n+m}(t). \quad (4P.)$$

Abgabetermin: 16.01.2008 (in der Vorlesung)