

Übungen Numerische Analysis
(Blatt 11)

Aufgabe 41

Für die Knotenverteilung $x_i := i, i \in \mathbb{Z}$ zeige man, dass

$$N_{i,m}(x) = \sum_{j=0}^m (-1)^{m-j} \binom{m}{j} \frac{(i+j-x)_+^{m-1}}{(m-1)!}$$

gilt. (4P.)

Aufgabe 42

Für gegebenes $m \in \mathbb{N}$ und $t \in (x_j, x_{j+1})$ berechne man die Anzahl der benötigten arithmetischen Operationen (Additionen und Multiplikationen) zur Berechnung des Funktionswertes

$$s(t) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \mathbf{d}_i N_{i,m}(t), \quad \mathbf{d}_i \in \mathbb{R}^2$$

mit Hilfe des de Boor-Algorithmus! (3P.)

Aufgabe 43

Man schreibe eine Maple-Prozedur, die für gegebenes $m \in \mathbb{N}$, eine vorgegebene Knotenfolge $X = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ und ein $\hat{x} \in (x_j, x_{j+1})$ aus $s(t) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \mathbf{d}_i N_{i,m}(t)$

die Kontrollpunkte der B-Spline-Kurve zur verfeinerten Knotenfolge \hat{X} der Form $s(t) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \hat{\mathbf{d}}_i \hat{N}_{i,m}(t)$ entsprechend des Satzes 3.12 der Vorlesung von Böhm berechnet.

Man wende die Prozedur an auf das Beispiel: $m = 3, x_j = j, j \in \mathbb{Z}, \hat{x} = 3.5,$
 $\mathbf{d}_1 = (5/2, 1), \mathbf{d}_2 = (7/2, 4), \mathbf{d}_3 = (9/2, -1), \mathbf{d}_4 = (11/2, 2),$
 $\mathbf{d}_j = (j + 3/2, 0)$ für $j \leq 0$ und $j \geq 4$.

Man stelle für dieses Beispiel die Kontrollpolygone vor und nach der Knoteneinfügung graphisch dar! (6P.)

Aufgabe 44

Gegeben sei die Knotenfolge $X = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ und es seien $N_{i,m}$ die zugehörigen B-Splines der Ordnung m . Man zeige, dass dann für $m > 1$ gilt:

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} \left(\frac{x_{i+1} + \dots + x_{i+m-1}}{m-1} \right) N_{i,m}(t) = t \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

(4P.)

Abgabetermin: 23.01.2008 (in der Vorlesung)