Universität Duisburg-Essen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. G. Plonka-Hoch WS 2007/08

Übungen Numerische Analysis
(Blatt 12)

Aufgabe 45
Sei $f : [A, B] \to \mathbb{R}$ konvex und differenzierbar. Zeigen Sie, dass die zusammengesetzte Trapezregel

$$T_n[f] = \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j - x_{j-1}}{2}(f(x_j) + f(x_{j-1}))$$

mit $A = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = B$ eine obere Schranke und die zusammengesetzte Mittelpunktregel

$$M_n[f] = \sum_{j=1}^{n} f\left(\frac{x_{j-1} + x_j}{2}\right)(x_j - x_{j-1})$$

eine untere Schranke für $\int_A^B f(x)dx$ liefert. (5P.)

Aufgabe 46
Für eine äquidistante Zerlegung $A = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = B$ mit $x_j = A + h\,j$ und $h = (B - A)/n$ lautet die Trapezregel

$$T_n[f] = \frac{h}{2}f(A) + h\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + \frac{h}{2}f(B).$$

Beweisen Sie für $f \in C^2[A, B]$ die Fehlerabschätzung

$$|I(f) - T_n[f]| \leq \frac{(B - A)}{12}\|f''\|_{[A,B]}h^2,$$

wobei $I(f) := \int_A^B f(x)dx$ und $\|f''\|_{[A,B]} := \max_{x\in[A,B]} |f''(x)|$. Verwenden Sie dazu Folgerung 4.3 der Vorlesung. (4P.)

Aufgabe 47
Leiten Sie für die äquidistante Zerlegung $A = x_0 < \ldots < x_n = B$ mit $x_j = A + h\,j$ und $h = \frac{B-A}{n}$ die zusammengesetzte Simpsonregel her. Zeigen Sie, dass zwischen der zusammengesetzten Simpsonregel $S_n[f]$ und der zusammengesetzten Trapezregel $T_n[f]$ der Zusammenhang

$$S_n[f] = T_{2n}[f] - \frac{1}{3}(T_n[f] - T_{2n}[f])$$

besteht. (3P.)

Aufgabe 48
Gegeben sei das Integral $I = \int_0^\pi \sin^2 x \; dx$.
Approximieren Sie I mit der zusammengesetzten Trapezregel für eine äquidistante Zerlegung des Intervalls $[0, \pi]$ in $n = 1, 4, 8$ Teilintervalle und vergleichen Sie mit I. (3P.)

Rückgabe: Mittwoch, 30.01.2008 (in der Vorlesung)