

Übungen Numerische Analysis (Blatt 2)

Aufgabe 5

Die Exponentialfunktion e^x soll durch ein Interpolationspolynom $p_n(x)$ vom Grad $n = 1, 5, 10, 20$ angenähert werden.

- a) Man berechne den maximalen Interpolationsfehler

$$R_n := \max_{x \in [0,1]} |e^x - p_n(x)|$$

numerisch (Maple) für die äquidistanten Stützstellen $x_j = \frac{j}{n}, j = 0, \dots, n$.

- b) Man schätze den Interpolationsfehler $R_n, n \in \mathbb{N}$ mit Hilfe von Satz 1.14 der Vorlesung für beliebige Stützstellen $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ in $[0, 1]$ ab!
- c) Welche Fehlerschranken ergeben sich für $n = 1, 5, 10, 20$? (7P.)

Aufgabe 6

Man zeige: Die Lebesgue-Konstante $\Lambda_n = \max_{x \in [a,b]} \sum_{k=0}^n |l_k(x)|$ ist nur von der relativen

Lage der Stützstellen $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ im Intervall $[a, b]$ abhängig, d.h., es gilt für $c = \tilde{x}_0 < \tilde{x}_1 < \dots < \tilde{x}_n = d$ mit

$$\tilde{x}_j = c + \frac{(x_j - a)(d - c)}{(b - a)},$$

dass

$$\Lambda_n = \tilde{\Lambda}_n := \max_{y \in [c,d]} \sum_{k=0}^n |\tilde{l}_k(y)|,$$

wobei $\tilde{l}_k (k = 0, \dots, n)$ die Lagrange-Grundpolynome für die Knotenfolge $\tilde{x}_0 < \dots < \tilde{x}_n$ sind. (4P.)

Aufgabe 7

Im Raum $\text{span}\{g_0, g_1\}$ mit $g_0(x) := 1, g_1(x) := x^2$ betrachte man die Interpolationsaufgabe für die Punkte

- a) $(x_0, y_0) = (-1/2, 1), (x_1, y_1) = (1, 2).$
- b) $(x_0, y_0) = (-1, 1), (x_1, y_1) = (1, 2).$
- c) $(x_0, y_0) = (0, -1), (x_1, y_1) = (1, 2).$
- d) Warum ist die Interpolationsaufgabe nicht stets eindeutig lösbar, wenn $x_0 \neq x_1$ beliebig aus $[-1, 1]$ gewählt werden, wohl aber, wenn $x_0, x_1 \in [0, 1]$ gilt? (5P.)

Aufgabe 8

Man zeige: Die Tschebyscheff-Polynome $T_n(x), n \geq 0$ haben die globale Darstellung

$$T_n(x) = \frac{1}{2}((x + \sqrt{x^2 - 1})^n + (x - \sqrt{x^2 - 1})^n) \text{ für } x \in \mathbb{R}. \quad (4P.)$$

Abgabetermin: 07.11.2007 (in der Vorlesung)