Universität Duisburg-Essen
Campus Duisburg
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. G. Plonka-Hoch

WS 07/08

Übungen Numerische Analysis

(Blatt 4)

Aufgabe 13

Man zeige folgenden Satz:

Sei $N = 2n+1, n \in \mathbb{N}$, und seien Stützstellen $x_k = \frac{2\pi k}{N}, k = 0, \dots, N-1$ und Stützwerte $y_k \in \mathbb{R}, k = 0, \dots, N-1$ gegeben. Dann besitzt das trigonometrische Interpolationsproblem in $\mathcal{T}_n$,

$$p(x_k) = y_k \quad k = 0, \dots, N-1,$$

die eindeutige Lösung

$$p(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{n} (a_j \cos jx + b_j \sin jx)$$

mit

$$\begin{aligned} a_j &:= \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k \cos(jx_k) \quad j = 0, \dots, n, \\ b_j &:= \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k \sin(jx_k) \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

(5P.)

Aufgabe 14

Man zeige, dass für reelle $x_1, x_2, \dots, x_{2n}$ die Funktion $t(x) = \prod_{k=1}^{2n} \sin(\frac{x-x_k}{2})$ ein trigonometrisches Polynom der Form

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{n} a_j \cos jx + b_j \sin jx$$

mit $a_j, b_j \in \mathbb{R}$ ist. (5P.)

Aufgabe 15

Man zeige, dass das interpolierende trigonometrische Polynom zu den Stützstellen

$$0 \le x_0 < x_1 < \dots < x_{2n} < 2\pi$$

und den Stützwerten $y_0, \dots, y_{2n}$ identisch mit

$$T(x) = \sum_{j=0}^{2n} y_j t_j(x)$$

ist, wobei

$$t_j(x) := \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{2n} \sin(\tfrac{x-x_k}{2}) / \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{2n} \sin(\tfrac{x_j - x_k}{2}).$$

(4P.)

Aufgabe 16

Man schreibe eine Prozedur, die

a) für ein gegebenes reelles trigonometrisches Polynom aus $\mathcal{T}_n$ mit den Koeffizienten $a_j, j = 0, \dots, n$ und $b_j, j = 1, \dots, n$ die Koeffizienten $c_j, j = -n, \dots, n$ in der komplexen Darstellung $p(t) = \sum_{j=-n}^{n} c_j e^{ijt}$ berechnet.

b) prüft, ob ein gegebenes Polynom der Form $p(t) = \sum_{j=-n}^{n} c_j e^{ijt}$ reell ist und die Koeffizienten a_j, b_j der reellen Darstellung

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{n} (a_j \cos(jt) + b_j \sin(jt))$$

berechnet. (4P.)

Abgabetermin: 21.11.2007 (in der Vorlesung)