

Übungen Numerische Analysis (Blatt 5)

Aufgabe 17

Beweisen Sie folgende Eigenschaften der DFT(N)

- a) Linearität: $(\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b})^\wedge = \alpha \widehat{\mathbf{a}} + \beta \widehat{\mathbf{b}} \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{C}, \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{C}^N)$
 b) Symmetrie:

$$\begin{aligned} (\mathbf{U} \mathbf{a})^\wedge &= \mathbf{U} \widehat{\mathbf{a}} \\ \widehat{\widehat{\mathbf{a}}} &= \mathbf{U} \widehat{\widehat{\mathbf{a}}} \end{aligned} \quad \text{mit} \quad \mathbf{U} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ & & \ddots & \\ 0 & 1 & & 0 \end{pmatrix}$$

- c) Verschiebung im Zeit- und Frequenzbereich:

$$(\mathbf{V}^n \mathbf{a})^\wedge = \mathbf{M}^n \widehat{\mathbf{a}}, \quad (\mathbf{M}^{-n} \mathbf{a})^\wedge = \mathbf{V}^n \widehat{\mathbf{a}} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

mit

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{M} = \text{diag}(\omega_N^j)_{j=0}^{N-1}.$$

(6P.)

Aufgabe 18

Berechnen Sie die diskrete Fourier-Transformierte der Vektoren

- a) $\mathbf{a} = (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^N, \quad N \in \mathbb{N},$
 b) $\mathbf{b} = (1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1) \in \mathbb{R}^{16},$
 c) $\mathbf{c} = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8) \in \mathbb{R}^8.$ (3P.)

Aufgabe 19

Stellen Sie den FFT-Algorithmus von Sande-Tukey für $\mathbf{a} = (a_0, \dots, a_{15}) \in \mathbb{C}^{16}$ durch einen Signalflussgraphen dar! (3P.)

Aufgabe 20

Berechnen Sie das Interpolationspolynom $p \in \mathbb{T}'_n$ für die 2π -periodische Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in [0, \pi) \\ 2\pi - x & x \in [\pi, 2\pi) \end{cases}$$

unter Verwendung von äquidistanten Stützstellen $x_k = \frac{2\pi k}{2n}, k = 0, \dots, 2n - 1$ und stellen Sie das Interpolationspolynom für $n = 8$ und $n = 16$ graphisch dar!
 Berechnen Sie den numerischen Interpolationsfehler $\|f - p\|_\infty$ für $n = 8$ und $n = 16$. (6P.)

Abgabetermin: 28.11.2007 (in der Vorlesung)