

Übungen Numerische Analysis
(Blatt 7)

Aufgabe 25

Man zeige: In einem unitären Vektorraum V gelten für $x, y \in V$ die Gleichungen:

- a) $\|x + y\|_2^2 = \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 + \langle y, x \rangle + \langle x, y \rangle$ (Satz von Pythagoras),
b) $\|x + y\|_2^2 + \|x - y\|_2^2 = 2(\|x\|_2^2 + \|y\|_2^2)$ (Parallelogramm-Gleichung).

Dabei ist $\|\cdot\|$ durch das Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ in V induziert.

(2P.)

Aufgabe 26

Man zeige: Durch Orthonormieren der Monome $1, t, t^2, t^3$ erhält man im Vektorraum Π_n mit dem Skalarprodukt

$$\langle p, q \rangle := \int_{-1}^1 p(t)q(t)dt \quad p, q \in \Pi_3$$

die normierten Legendre-Polynome

$$L_k(t) = \sqrt{\frac{2k+1}{2}} \frac{1}{2^k k!} \frac{d^k}{dt^k} [(t^2 - 1)^k], \quad k = 0, \dots, 3.$$

(6P.)

Aufgabe 27

Im Raum $\Pi_3([-1, 1])$ bestimme man die beste Approximation der Funktion $f(t) = \sqrt{1-t}$ durch eine Linearkombination von Monomen $1, t, t^2, t^3$ und durch die Legendrepolynome $L_k(t), k = 0, \dots, 3$ bzgl. der Norm

$$\|f\|_2 = \left(\int_{-1}^1 |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Man stelle die Funktion $f(t)$ und die beste Approximation graphisch dar! (6P.)

Aufgabe 28

Man überprüfe, ob die Norm

$$\|f\|_1 := \int_a^b |f(x)| dx$$

streng konvex ist.

(2P.)

Abgabetermin: 12.12.2007 (in der Vorlesung)