Universität Duisburg-Essen
Campus Duisburg
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. G. Plonka-Hoch WS 07/08

Übungen Numerische Analysis
(Blatt 8)

Aufgabe 29

Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten $a_k(f),\ k = 0, 1, 2, \ldots$ und $b_k(f),\ k = 1, 2, 3, \ldots$ für die 2π-periodische Funktion

$$f(t) = \begin{cases} 1 - \frac{2}{\pi}t & 0 \le t \le \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \frac{\pi}{2} < t \le \frac{3\pi}{2}, \\ -3 + \frac{2}{\pi}t & \frac{3\pi}{2} < t < 2\pi. \end{cases}$$

Stellen Sie $f(t)$ und ihr Fourierpolynom

$$p_0(t) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n} \{a_k(f)\cos kt + b_k(f)\sin(kt)\}$$

für $n = 8$ graphisch dar! (5P.)

Aufgabe 30

Entwickeln Sie eine Prozedur zur Berechnung und graphischen Darstellung des Fourierpolynoms $p_0 \in \mathbb{T}_n$,

$$p_0(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)\, e^{ixk},$$

wobei statt $c_k(f)$ die Näherungswerte $c_k^* = \frac{1}{M}\sum_{j=0}^{M-1} f(\frac{2\pi j}{M})\, w_M^{jk}$ mittels schneller Fouriertransformation berechnet werden. Die Auswertung von $p_0(x)$ kann dann an äquidistanten Stellen $x = \frac{2\pi j}{r}$, $j = 0, \ldots, r-1$, wiederum mittels eines FFT-Algorithmus erfolgen.
Wenden Sie Ihre Prozedur auf die Funktion in Aufgabe 29 an und vergleichen Sie die Darstellungen für $p_0(t)$ für $n = 8$ und $M = 16$ bzw. $M = 32$. (7P.)

Aufgabe 31

Zeigen Sie: Die Tschebyscheff-Polynome $\sqrt{\frac{1}{\pi}}\, T_0(x)$, $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, T_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots, n$ bilden eine Orthonormalbasis von Π_n bezüglich des Skalarproduktes

$$< f, g >= \int_{-1}^{1} f(x)\, g(x)\, (1-x^2)^{-1/2}\, dx. \qquad (3P.)$$

Aufgabe 32

Für zwei 2π-periodische Funktionen $f, g \in C([0, 2\pi))$ wird die Faltung $f * g$ von f und g definiert durch

$$(f * g)(x) = \int_0^{2\pi} f(x-y)\, g(y) dy.$$

Zeigen Sie, dass für die Fourierkoeffizienten $c_k(f), c_k(g)$ und $c_k(f * g)$ der Zusammenhang

$$c_k(f * g) = 2\pi \cdot c_k(f) \cdot c_k(g), \qquad k \in \mathbb{Z}$$

besteht. (3P.)

<u>Abgabetermin:</u> 19.12.2007 (in der Vorlesung)