

Numerische Methoden der Signal- und Bildverarbeitung
(Blatt 1)

Aufgabe 1

Berechnen Sie die Fouriertransformierte der Funktion

$$N_2(x) := \begin{cases} x^2/2 & x \in [0, 1) \\ (-2x^2 + 6x - 3)/2 & x \in [1, 2) \\ (3 - x)^2/2 & x \in [2, 3] \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(Die Funktion $N_2(x)$ ist der kardinale quadratische B-Spline.)

Aufgabe 2

Man zeige folgende Eigenschaften der Fouriertransformation von $f \in L^1$:

- Symmetrie:

Für $h(x) := f(-x)$ gilt $\widehat{h}(w) = \widehat{f}(-w)$.

Für $h(x) := \overline{f(x)}$ gilt $\widehat{h}(w) = \overline{\widehat{f}(-w)}$.

- Zeit- bzw. Frequenzverschiebung:

Für $h(x) := f(x - x_0)$ gilt $\widehat{h}(w) = e^{-ix_0 w} \widehat{f}(w)$ ($x_0 \in \mathbb{R}$).

Für $h(x) := e^{iw_0 x} f(x)$ gilt $\widehat{h}(w) = \widehat{f}(w - w_0)$ ($w_0 \in \mathbb{R}$).

- Faltung im Zeit- und Frequenzbereich:

$$(f * g)^\wedge = \widehat{f} \cdot \widehat{g} \quad (f, g \in L^1),$$

$$(\widehat{f} * \widehat{g}) = 2\pi(f \cdot g)^\wedge \quad (\widehat{f}, \widehat{g} \in L^1).$$

Aufgabe 3

Berechnen Sie die Fourier-Reihe der Funktion $g \in L^1([-\pi, \pi])$

$$g(x) := \frac{x}{\pi}, \quad x \in [-\pi, \pi].$$

Aufgabe 4

Stellen Sie die Fouriersumme von $g(x)$ aus Aufgabe 3 für $n = 5$, $n = 10$ und $n = 15$ graphisch dar! (Maple oder MATLAB etc.)

Abgabetermin: 30.10.2006, in der Vorlesung.