

Numerische Methoden der Signal- und Bildverarbeitung (Blatt 10)

Aufgabe 1

Man zeige: Jede 2π -periodische Funktion $\lambda(w) \in L^2_{2\pi}$, die die Relation $\lambda(w) + \lambda(w + \pi) = 0$ erfüllt, lässt sich in der Form

$$\lambda(w) = e^{iw} v(2w)$$

darstellen, wobei $v \in L^2_{2\pi}$ ebenfalls eine 2π -periodische Funktion ist.

Aufgabe 2

Gegeben seien die Voraussetzungen von Satz 2.10 der Vorlesung.

Man zeige: Ist $\{\psi(\cdot - n) : n \in \mathbb{Z}\}$ eine orthonormale Basis des Waveletraumes W_0 und ist $\hat{\psi}(w)$ durch

$$\hat{\psi}(w) = e^{i\frac{w}{2}} \overline{m_0\left(\frac{w}{2} + \pi\right)} \hat{\phi}\left(\frac{w}{2}\right)$$

mit Hilfe der Skalierungsfunktion ϕ festgelegt, so ist jede Funktion $\psi^*(x)$ mit $\hat{\psi}^*(w) = \rho(w)\hat{\psi}(w)$ mit einer 2π -periodischen Funktion $\rho(w) \in L^2_{2\pi}$ und $|\rho(w)| = 1$ ebenfalls ein orthogonales Wavelet, d.h. $\{\psi^*(\cdot - n) : n \in \mathbb{Z}\}$ ist eine orthonormale Basis von W_0 .

Aufgabe 3

Erstellen Sie eine Prozedur, die die Funktionswerte $\phi(\frac{k}{2^j})$ ($k = 0, \dots, 3 \cdot 2^j$) der Daubechies-Skalierungsfunktion berechnet, wobei

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \sum_{k=0}^3 h_k \phi(2x - k), \\ h_0 &= \frac{1+\sqrt{3}}{4}, \quad h_1 = \frac{3+\sqrt{3}}{4}, \quad h_2 = \frac{3-\sqrt{3}}{4}, \quad h_3 = \frac{1-\sqrt{3}}{4}. \end{aligned}$$

Stellen Sie die Skalierungsfunktion ϕ graphisch dar!

Aufgabe 4

Erstellen Sie eine Prozedur zur Anwendung des Zerlegungsalgorithmus der schnellen Wavelet-Transformation. Für gegebene Filterfolgen (h_k) und (g_k) sowie eine vorgegebene Anzahl J von Levels ist dabei ein Datenvektor $\mathbf{a}^0$ in die Vektoren $\mathbf{a}^{-J}, \mathbf{c}^{-J}, \dots, \mathbf{c}^{-1}$ zu zerlegen. Wenden Sie die Prozedur für die Filterfolgen $(h_k), (g_k)$ mit

$$h_0 = \frac{1 + \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \quad h_1 = \frac{3 + \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \quad h_2 = \frac{3 - \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \quad h_3 = \frac{1 - \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \quad h_k = 0 \quad k \notin \{0, 1, 2, 3\}$$

sowie $g_k = (-1)^k h_{-k+1}$ ($k \in \mathbb{Z}$), $J = 3$ und $\mathbf{a}^0 = (\sin(\frac{k}{5}))_{k=0}^{63}$ an!

Abgabetermin: 15.01.2007, in der Vorlesung.