Universität Duisburg-Essen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. G. Plonka-Hoch

WS 2006/07

Numerische Methoden der Signal- und Bildverarbeitung

(Blatt 11)

Aufgabe 1

Erstellen Sie eine Prozedur für den Rekonstruktionsalgorithmus der schnellen Wavelet-Transformation. Für gegebene Filterfolgen $(h_k), (g_k)$ ist dabei aus den vorgegebenen Vektoren $\mathbf{a}^{-J}, \mathbf{c}^{-J}, \mathbf{c}^{-J+1}, \dots, \mathbf{c}^{-1}$ der Datenvektor $\mathbf{a}^0$ zu rekonstruieren. Wenden Sie die Prozedur für die Filterfolgen $(h_k), (g_k)$ mit

$$h_3 = \frac{1-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}},\; h_2 = \frac{3-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}},\; h_1 = \frac{3+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}},\; h_0 = \frac{1+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}},\; h_k = 0 \;\; k \notin \{0,1,2,3\}$$

sowie $g_k = (-1)^k \, h_{-k+1}$ $(k \in \mathbb{Z})$ und die in Aufgabe 4, Blatt 10 erhaltenen Vektoren $\mathbf{a}^{-J}, \dots, \mathbf{c}^{-1}$ an.

Aufgabe 2

Man überprüfe, ob die Filter $H(w), G(w), \tilde{H}(w), \tilde{G}(w)$ mit

$$\begin{aligned}
H(w) &= \tfrac{1}{4}((1+\sqrt{3}) + (3+\sqrt{3})e^{-iw} + (3-\sqrt{3})e^{-2iw} + (1-\sqrt{3})e^{-3iw}) \\
G(w) &= \tfrac{1}{4}((1-\sqrt{3})e^{2iw} - (3-\sqrt{3})e^{iw} + (3+\sqrt{3}) - (1+\sqrt{3})e^{-iw}) \\
\tilde{H}(w) &= 2\overline{H(w)},\; \tilde{G}(w) = 2\overline{G(w)}
\end{aligned}$$

eine Filterbank perfekter Rekonstruktion bilden.

Aufgabe 3

Finden Sie einen Filter $H(w)$ der Form

$$H(w) = \left(\frac{1+e^{-iw}}{2}\right)^2 \cdot L(w)$$

mit $L(w) = a + b \cdot e^{-iw}$, so dass $H(w)$ die notwendige Bedingung des Zweiskalen-Symbols einer orthonormalen Skalierungsfunktion $|H(w)|^2 + |H(w+\pi)|^2 = 1$ erfüllt. Lässt sich außerdem noch die Normierungsbedingung $H(0) = 1$ erfüllen?

Aufgabe 4

Geben Sie die Übertragungsfunktion, den Amplitudengang und den Phasengang des linearen Filters mit der Impulsantwort $\{h(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ an, wobei

$$h(-2) = h(6) = \frac{3}{128},\; h(-1) = h(5) = -\frac{3}{64},$$
$$h(0) = h(4) = -\frac{1}{8},\; h(1) = h(3) = \frac{19}{64},\; h(2) = \frac{45}{64}.$$

Stellen Sie den Amplitudengang des Filters graphisch dar!

Um was für einen Filter handelt es sich?

Abgabetermin: 22.01.2007, in der Vorlesung.