Universität Duisburg-Essen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. G. Plonka-Hoch

WS 2006/07

Numerische Methoden der Signal- und Bildverarbeitung

(Blatt 12)

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass mit Hilfe des idealen Tiefpassfilters $H(w) = H_{TP}(w)$ und des idealen Hochpassfilters $G(w) = H_{HP}(w)$ mit

$$H_{TP}(w) := \begin{cases} 1 & |w| \le \frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2} < |w| < \pi \end{cases}, \quad H_{HP}(w) = \begin{cases} 1 & \frac{\pi}{2} < |w| \le \pi \\ 0 & |w| \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

eine Filterbank perfekter Rekonstruktion gebildet werden kann. Wie sind in diesem Fall $\tilde{H}(w)$ und $\tilde{G}(w)$ zu wählen?

Aufgabe 2

Modifizieren Sie die bereits bekannten Zerlegungs- und Rekonstruktionsalgorithmen für die schnelle Wavelet-Transformation so, dass sie als Zerlegungs- bzw. Rekonstruktionsteil einer Zwei-Kanal-Filterbank mit perfekter Rekonstruktion mit den Filterfolgen (h_k), (g_k), $(\tilde{h}_k)$, $(\tilde{g}_k)$ verstanden werden können.

Wenden Sie den biorthogonalen 7-9-Filter aus der Vorlesung zur Zerlegung des Signals $\mathbf{a}^0 = (N_3(\frac{k-63}{128}))_{k=0}^{511}$ in die Vektoren $\mathbf{d}^1$, $\mathbf{d}^2$, $\mathbf{d}^3$, $\mathbf{a}^3$ an und stellen Sie das Signal $\mathbf{a}^0$ sowie die Signale $\mathbf{d}^1$, $\mathbf{d}^2$, $\mathbf{d}^3$, $\mathbf{a}^3$ graphisch dar! Dabei ist $N_3(x)$ der quadratische B-Spline (siehe z. B. Aufgabe 1, Blatt 1).

Aufgabe 3

Stellen Sie den Amplitudengang der Daubechies-Filter D_4 (4 Koeffizienten) und D_{20} (20 Koeffizienten) graphisch dar und ziehen Sie einen Vergleich!

Aufgabe 4

Es sei $m_0(w) = \sum_{n=-N_0}^{N_1} a_n e^{-iwn} = e^{iN_0 w} \sum_{n=0}^{N} \tilde{a}_n e^{-iwn}$ (mit $N = N_0 + N_1$, $\tilde{a}_n = a_{n-N_0}$) ein trigonometrisches Polynom. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(1) $m_0^{(k)}(\pi) = 0 \quad k = 0, 1, 2, \ldots, m-1;$

(2) $\sum_{n=0}^{N} \tilde{a}_n \cdot (-1)^n \cdot n^k = 0 \quad k = 0, 1, \ldots m-1;$

(3) Es existiert ein trigonometrisches Polynom $L(w)$, so dass

$$m_0(w) = \left(\frac{1 + e^{-iw}}{2}\right)^m \cdot L(w).$$

Abgabetermin: 29.01.2007, in der Vorlesung.