

## Numerische Methoden der Signal- und Bildverarbeitung

### (Blatt 2)

#### Aufgabe 1

Man zeige die folgenden Eigenschaften der Folgen der Fourierkoeffizienten  $\mathbf{c}(f) = (c_k(f))_{k=-\infty}^{\infty}$ ,  $\mathbf{c}(g) = (c_k(g))_{k=-\infty}^{\infty}$  der Funktionen  $f, g \in L_{2\pi}^2$ :

a) Symmetrie:

$$\mathbf{c}(f(-\cdot)) = (c_{-k}(f))_{k=-\infty}^{\infty}, \quad \mathbf{c}(\overline{f}) = (\overline{c_{-k}(f)})_{k=-\infty}^{\infty}$$

b) Zeitverschiebung: Für  $x_0 \in \mathbb{R}$  gilt:

$$\mathbf{c}(f(\cdot - x_0)) = (e^{-ix_0k} c_k(f))_{k=-\infty}^{\infty}$$

c) Faltung in Zeit- und Frequenzbereich:

$$\mathbf{c}(f * g) = (c_k(f) \cdot c_k(g))_{k=-\infty}^{\infty},$$

$$\mathbf{c}(f \cdot g) = \left( \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j(f) c_{k-j}(g) \right)_{k=-\infty}^{\infty}.$$

Dabei ist die Faltung von  $f, g \in L_{2\pi}^2$  definiert durch

$$(f * g)(x) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-u)g(u)du.$$

#### Aufgabe 2

Man berechne den kubischen Interpolationsspline mit  $\text{supp } \tilde{I}_s = [-2, 2]$ ,  $I_s(t) = I_s(-t)$   $t \in \mathbb{R}$  von der Form

$$\tilde{I}_s(t) = \begin{cases} a_1 t^3 + b_1 t^2 + c_1 t + d_1 & 0 \leq t \leq 1 \\ a_2 t^3 + b_2 t^2 + c_2 t + d_2 & 1 < t \leq 2 \end{cases}$$

wobei

$$\begin{aligned} \tilde{I}_s(0) &= 1, \quad \tilde{I}_s(1) = \tilde{I}_s(2) = \tilde{I}'_s(0) = 0, \\ \tilde{I}'_s(1) &= -1, \quad \tilde{I}'_s(2) = 0. \end{aligned}$$

#### Aufgabe 3

Man erstelle ein Programm zur Datenreduktion in einem Signal durch Downsampling und anschließender Rekonstruktion mittels Interpolation mit dem kubischen Spline  $\tilde{I}_s(t)$ . Dabei sollen möglichst wenig Rechenoperationen verwendet werden.

#### Aufgabe 4

Man wende das Programm aus Aufgabe 3 zur Rekonstruktion des Signals  $\mathbf{x} = (\sin(\frac{\pi l}{10})^2 \exp(\frac{-\pi l}{10}))_{l=0}^{99}$  nach einem Downsampling mit  $m_1 = m_2 = 2$  an! Wie groß ist der mittlere quadratische Fehler (MSE) des rekonstruierten Signals im Vergleich zum Originalsignal?

**Abgabetermin:** 6.11.2006, in der Vorlesung.