Numerische Methoden der Signal- und Bildverarbeitung

(Blatt 4)

Aufgabe 1

Man zeige: Die Kovarianzmatrix

$$\mathbf{A}_N = (\rho^{|i-j|})_{i,j=0}^{N-1} = \begin{bmatrix} \rho^0 & \rho^1 & \rho^2 & \dots & \rho^{N-1} \\ \rho^1 & \rho^0 & \rho^1 & \dots & \rho^{N-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \rho^{N-1} & \dots & \dots & \rho^1 & \rho^0 \end{bmatrix}$$

eines stationären Markov-1-Signals ist für $\rho \neq 0$ invertierbar und die Inverse hat die Form

$$\mathbf{A}_N^{-1} = (1 - \rho^2)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & -\rho & 0 & \dots & 0 \\ -\rho & 1 + \rho^2 & -\rho & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 + \rho^2 & -\rho \\ 0 & \dots & 0 & -\rho & 1 \end{bmatrix}.$$

Aufgabe 2

Man berechne die positiven reellen Nullstellen w_j der Gleichung

$$\tan(Nw) = \frac{-(1 - \rho^2) \sin w}{\cos w - 2\rho + \rho^2 \cos w}$$

für $\rho = \frac{1}{2}$ und $N = 4!$ Man vergleiche die Eigenwerte der Matrix $\mathbf{A}_4$ aus Aufgabe 1 mit den Werten

$$\mu_j = \frac{1 - \rho^2}{1 - 2\rho \cos w_j + \rho^2} \quad j = 1, 2, 3, 4!$$

Aufgabe 3

Man berechne die Eigenwerte und Eigenvektoren der Kovarianzmatrix $\mathbf{A} = (\rho^{|i-j|})_{i,j=0}^{N-1}$ eines stationären Markov-1-Signals für $\rho \rightarrow 0!$

Man gebe die aus den Eigenvektoren entstehende orthogonale Transformationsmatrix in allgemeiner Form und speziell für $N = 2$ und $N = 4$ an !

Aufgabe 4

Man zeige: Die Zeilen der Matrix $C_N^{II} = (\frac{2}{N})^{1/2} (\varepsilon_j \cos \frac{j(2k+1)}{2N} \pi)_{j,k=0}^{N-1}$ mit $\varepsilon_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und $\varepsilon_j = 1$ für $j = 1, \dots, N-1$ sind Eigenvektoren der Matrix

$$\mathbf{E} = (\mathbf{1})_{j,k=0}^{N-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Abgabetermin: 20.11.2006, in der Vorlesung.