Universität Duisburg-Essen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. G. Plonka-Hoch WS 2006/07

Numerische Methoden der Signal- und Bildverarbeitung

(Blatt 5)

Aufgabe 1
Man zeige: Die Matrix $\mathbf{B}_1 \in \mathbb{R}^{N\times N}$ der Form

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & & & & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/2 & & & \\ & 1/2 & 0 & & & \\ & & & \ddots & 1/2 & \\ & & & 1/2 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & & & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$$

wird durch die Kosinus-Transformationsmatrix vom Typ I

$$C_N^I := \left(\tfrac{2}{N-1}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\varepsilon_j\, \varepsilon_k\, \cos \tfrac{jk\pi}{N-1}\right)_{j,k=0}^{N-1}$$

mit $\varepsilon_0 = \varepsilon_{N-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und $\varepsilon_j = 1$ für $j = 1, \ldots, N-2$ diagonalisiert.

Aufgabe 2
Man zeige: Die Kosinusmatrix vom Typ II

$$C_N^{II} := (\tfrac{2}{N})^{\frac{1}{2}} \left(\varepsilon_j \cos\left(\tfrac{j(2k+1)}{2N}\right)\right)_{j,k=0}^{N-1} \in \mathbb{R}^{N\times N}$$

mit $\varepsilon_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und $\varepsilon_j = 1$ für $j = 1, \ldots, N-1$ ist eine orthogonale Matrix, d.h. $(C_N^{II})^{-1} = (C_N^{II})^T$.

Aufgabe 3
Es seien J_N die Gegenidentität und $D_N := \mathrm{diag}((-1)^{\mathrm{k}})_{\mathrm{k}=0}^{\mathrm{N}-1}$. Man zeige, dass für die Kosinusmatrix $C_{N+1}^I \in \mathbb{R}^{(N+1)\times(N+1)}$ vom Typ I gilt:

$$C_{N+1}^I\, J_{N+1} = D_{N+1}\, C_{N+1}^I\ .$$

Aufgabe 4
Man zeige, dass für die Matrizen J_N und D_N aus Aufgabe 3 und für die Kosinusmatrix vom Typ IV

$$C_N^{IV} := (\tfrac{2}{N})^{\frac{1}{2}} \left(\cos \tfrac{(j+\frac{1}{2})(k+\frac{1}{2})\pi}{N}\right)_{j,k=0}^{N-1} \in \mathbb{R}^{N\times N}$$

die Identität

$$(-1)^{N-1}\, C_N^{IV}\, J_N\, D_N \ =\ J_N\, D_N\, C_N^{IV}$$

gilt.

Abgabetermin: 27.11.2006, in der Vorlesung.