Universität Duisburg-Essen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. G. Plonka-Hoch WS 2006/07

Numerische Methoden der Signal- und Bildverarbeitung

(Blatt 9)

Aufgabe 1

Berechnen Sie das Autokorrelationssymbol der Hutfunktion

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 - |x| & x \in [-1, 1] \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Verwenden Sie die Beziehung

$$\Phi(\omega) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(\omega + 2\pi l)|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \phi, \phi(\cdot - k) \rangle e^{-iwk}$$

aus der Vorlesung.

Aufgabe 2

Das Meyer-Fenster ϕ ist durch die Fouriertransformierte

$$\hat{\phi}(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \frac{2\pi}{3} \\ \cos[\frac{\pi}{2} \cdot v(\frac{3}{2\pi}|\omega| - 1)] & \frac{2\pi}{3} \le |\omega| \le \frac{4\pi}{3} \end{cases}$$

definiert, wobei v eine glatte Funktion ist die

$$v(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ \\ 1 & x \ge 1 \end{cases} \quad \text{und } v(x) + v(1-x) = 1$$

erfüllt. Man zeige, dass das Zweiskalensymbol

$$m_0(\omega) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \hat{\phi}(2\omega + 4\pi l)$$

die Beziehung $|m_0(\omega)|^2 + |m_0(\omega + \pi)|^2 = 1 \qquad \forall\, \omega \in \mathbb{R}$ erfüllt.

Aufgabe 3

Das „Bracketprodukt“ zweier Funktionen $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ ist durch

$$[\hat{f}, \hat{g}] := \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(\cdot + 2k\pi)\overline{\hat{g}(\cdot + 2k\pi)}$$

definiert.
Man zeige:
a) $[\alpha\hat{f}, \hat{g}] = \alpha[\hat{f}, \hat{g}] = [\hat{f}, \overline{\alpha}\hat{g}] \quad (\alpha \in L^\infty_{2\pi})$
b) $f \perp g(\cdot - k)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ genau dann, wenn $[\hat{f}, \hat{g}] = 0$ f.ü.

Aufgabe 4

Stellen Sie das Meyerfenster $\hat{\phi}(\omega)$ für $v(x) = x$ und $v(x) = x^4(35-84x+70x^2-20x^3)$ im Frequenzbereich graphisch dar! Stellen Sie außerdem den Betrag des Meyer-Wavelets $|\hat{\psi}(\omega)|$ mit

$$\hat{\psi}(\omega) = e^{\frac{iw}{2}}[\hat{\phi}(\omega + 2\pi) + \hat{\phi}(\omega - 2\pi)]\,\hat{\phi}(\frac{\omega}{2})$$

im Frequenzbereich graphisch dar!

Abgabetermin: 08.01.2007, in der Vorlesung.