

Numerische Methoden der Signal- und Bildverarbeitung
(Blatt 1)

Aufgabe 1

Man zeige folgende Eigenschaften der Fouriertransformation von $f \in L^1$:

- Symmetrie:

$$\text{Für } h(x) := f(-x) \quad \text{gilt} \quad \widehat{h}(w) = \widehat{f}(-w).$$

$$\text{Für } h(x) := \overline{f(x)} \quad \text{gilt} \quad \widehat{h}(w) = \overline{\widehat{f}(-w)}.$$

- Zeit- bzw. Frequenzverschiebung:

$$\text{Für } h(x) := f(x - x_0) \quad \text{gilt} \quad \widehat{h}(w) = e^{-ix_0 w} \widehat{f}(w) \quad (x_0 \in \mathbb{R}).$$

$$\text{Für } h(x) := e^{iw_0 x} f(x) \quad \text{gilt} \quad \widehat{h}(w) = \widehat{f}(w - w_0) \quad (w_0 \in \mathbb{R}).$$

- Faltung im Zeit- und Frequenzbereich:

$$(f * g)^\wedge = \widehat{f} \cdot \widehat{g} \quad (f, g \in L^1),$$

$$(\widehat{f} * \widehat{g}) = 2\pi (f \cdot g)^\wedge \quad (\widehat{f}, \widehat{g} \in L^1).$$

Dabei ist die Faltung von $f, g \in L^1$ durch

$$(f * g)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(y) g(x - y) dy$$

definiert.

Aufgabe 2

Man berechne den kubischen Interpolationsspline mit $\text{supp } \tilde{I}_s = [-2, 2]$, $I_s(t) = I_s(-t)$ $t \in \mathbb{R}$ von der Form

$$\tilde{I}_s(t) = \begin{cases} a_1 t^3 + b_1 t^2 + c_1 t + d_1 & 0 \leq t \leq 1 \\ a_2 t^3 + b_2 t^2 + c_2 t + d_2 & 1 < t \leq 2 \end{cases}$$

wobei

$$\tilde{I}_s(0) = 1, \quad \tilde{I}_s(1) = \tilde{I}_s(2) = \tilde{I}'_s(0) = 0,$$

$$\tilde{I}'_s(1) = -1, \quad \tilde{I}'_s(2) = 0.$$

Aufgabe 3

Man erstelle ein Programm zur Datenreduktion in einem Signal durch Downsampling und anschließender Rekonstruktion mittels Interpolation mit dem kubischen Spline $\tilde{I}_s(t)$. Dabei sollen möglichst wenig Rechenoperationen verwendet werden.

Aufgabe 4

Man wende das Programm aus Aufgabe 3 zur Rekonstruktion des Signals $\mathbf{x} = (\sin(\frac{\pi l}{10})^2 \exp(\frac{-\pi l}{10}))_{l=0}^{99}$ nach einem Downsampling mit $m = 2$ an! Wie groß ist der mittlere quadratische Fehler (MSE) des rekonstruierten Signals im Vergleich zum Originalsignal?

Abgabetermin: 29.04.2009, in der Vorlesung.