

Numerische Methoden der Signal- und Bildverarbeitung

(Blatt 10)

Aufgabe 1

Modifizieren Sie die bereits bekannten Zerlegungs- und Rekonstruktionsalgorithmen für die schnelle Wavelet-Transformation so, dass sie als Zerlegungs- bzw. Rekonstruktionsteil einer Zwei-Kanal-Filterbank mit perfekter Rekonstruktion mit den Filterfolgen (h_k) , (g_k) , $(\tilde{h}_k)$, $(\tilde{g}_k)$ verstanden werden können.

Wenden Sie den biorthogonalen 7-9-Filter aus der Vorlesung zur Zerlegung des Signals $\mathbf{c}^0 = (N_3(\frac{k-63}{128}))_{k=0}^{511}$ in die Vektoren $\mathbf{d}^1$, $\mathbf{d}^2$, $\mathbf{d}^3$, $\mathbf{c}^3$ an und stellen Sie das Signal $\mathbf{c}^0$ sowie die Signale $\mathbf{d}^1$, $\mathbf{d}^2$, $\mathbf{d}^3$, $\mathbf{c}^3$ graphisch dar! Dabei ist $N_3(x)$ der quadratische B-Spline

$$N_3(x) := \begin{cases} x^2/2 & x \in [0, 1) \\ (-2x^2 + 6x - 3)/2 & x \in [1, 2) \\ (3 - x)^2/2 & x \in [2, 3) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (6P)$$

Aufgabe 2

Eine Waveletfunktion $\psi \in L^2(\mathbb{R})$, definiert durch $\hat{\psi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}G(\frac{\omega}{2})\hat{\phi}(\frac{\omega}{2})$ (wobei ϕ eine MRA von $L^2(\mathbb{R})$ erzeugt und $\hat{\phi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}H(\frac{\omega}{2})\hat{\phi}(\frac{\omega}{2})$ mit $\hat{\phi}(0) = 1$ gilt, und H, G FIR-Filter sind), erfülle die Bedingung der "verschwindenden Momente" der Ordnung m , d.h.,

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^k \psi(x) dx = 0, \quad k = 0, 1, \dots, m-1.$$

Man zeige:

- a) Dann erfüllt ψ die Bedingung $\frac{d^k}{d\omega^k}\hat{\psi}(0) = 0$ für $k = 0, \dots, m-1$.
- b) Der Filter $G(\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g(k)e^{-i\omega k}$ erfüllt die Bedingung $\frac{d^k}{d\omega^k}G(0) = 0$ für $k = 0, \dots, m-1$. (4P)

Aufgabe 3

Gegeben sei die durch die FIR-Filter $H, \tilde{H}, G, \tilde{G}$ erzeugte Filterbank perfekter Rekonstruktion. Die durch H und $\tilde{H}$ festgelegten Funktionen ϕ und $\tilde{\phi}$ erzeugen zwei MRA's von $L^2(\mathbb{R})$ und es gelte $\langle \phi, \tilde{\phi}(\cdot - n) \rangle = \delta_{0,n}$. In V_0 werden Polynome bis zum Grad $m-1$ lokal exakt reproduziert, d.h., es existieren Zahlenfolgen $\mathbf{c}^k = (c_n^k)_{n \in \mathbb{Z}}$ mit

$$x^k = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n^k \phi(x - n) \quad k = 0, \dots, m-1.$$

Man zeige:

- a) Der Filter $H(\omega)$ (mit $\hat{\phi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}H(\frac{\omega}{2})\hat{\phi}(\frac{\omega}{2})$) erfüllt die Bedingung $\frac{d^k}{d\omega^k}H(\pi) = 0$ für $k = 0, \dots, m-1$.
- b) Der Filter $\tilde{G}(\omega)$ (mit $\hat{\tilde{\psi}}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{G}(\frac{\omega}{2})\hat{\tilde{\phi}}(\frac{\omega}{2})$) erfüllt die Bedingung $\frac{d^k}{d\omega^k}\tilde{G}(0) = 0$ für $k = 0, \dots, m-1$. (4P)

Abgabetermin: 01.07.2009, in der Vorlesung.