

Numerische Methoden der Signal- und Bildverarbeitung

(Blatt 11)

Aufgabe 1

Man zeige:

Die Funktion $\widehat{K}(\omega_1, \omega_2) := e^{-(\omega_1^2 + \omega_2^2)t}$, mit $t > 0$, besitzt die inverse Fourier-Transformierte

$$\begin{aligned} K(x, y) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{K}(\omega_1, \omega_2) e^{i(\omega_1 x + \omega_2 y)} d\omega_1 d\omega_2 \\ &= \frac{1}{4\pi t} e^{-(x^2 + y^2)/4t}. \end{aligned}$$

Insbesondere gilt $K(0, 0) = \frac{1}{4\pi t}$. (5P)

Aufgabe 2

Sei

$$\begin{aligned} u(x, y) &= (f * K)(x, y) \\ &:= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(s, t) K(x - s, y - t) ds dt \end{aligned}$$

wobei $u, f, K \in L^2(\mathbb{R}^2)$. Man zeige, dass nach Anwendung der zweidimensionalen Fouriertransformation gilt $\widehat{u}(\omega_1, \omega_2) = \widehat{f}(\omega_1, \omega_2) \cdot \widehat{K}(\omega_1, \omega_2)$. (3P)

Aufgabe 3

Sei

$$u(x, y, t) = \begin{cases} f(x, y) & t = 0 \\ (K(\cdot, \cdot, t) * f)(x, y) & t > 0 \end{cases}$$

die Lösung der linearen Diffusionsgleichung, wobei $K(x, y, t) := \frac{1}{4\pi t} e^{-(x^2 + y^2)/4t}$.

Man zeige, dass das Extremum-Prinzip gilt:

Für $t > 0$ und $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$\inf_{(x, y) \in \mathbb{R}^2} f(x, y) \leq u(x, y, t) \leq \sup_{(x, y) \in \mathbb{R}^2} f(x, y). \quad (4P)$$

Aufgabe 4

Man stelle die Perona-Malik-Diffusivität, die Charbonnier-Diffusivität und die Weickert-Diffusivität mittels Matlab für $\lambda = 1$ graphisch dar. (4P)

Abgabetermin: 08.07.2009, in der Vorlesung.