

Numerische Methoden der Signal- und Bildverarbeitung

(Blatt 12)

Aufgabe 1

Man erstelle eine Matlab-Prozedur zur Entstörung von Bildern mittels linearer Diffusion durch explizite Diskretisierung der Diffusionsgleichung und Verwendung von Neumann-Randbedingungen. Man wende die Prozedur auf das gestörte Shannon-Bild an, das mit der Prozedur test1.m (auf der Homepage der Vorlesung) erstellt werden kann. Man stelle die rekonstruierten Bilder nach 4, 6, 8 und 10 Iterationen mit Zeitschrittweite $\tau = 0.25$ graphisch dar und berechne die zugehörigen SNR-Werte durch Vergleich mit den Originalbild. (6P)

Aufgabe 2

Gegeben sei die explizite Matrixdarstellung

$$\frac{u^{k+1} - u^k}{\tau} = A(u^k)u^k$$

des Modells der nichtlinearen Diffusion mit $A(u^k) = (a_{ij}(u^k))_{i,j=0}^{N-1}$ wobei

$$a_{ij}(u_k) := \begin{cases} \frac{1}{2}(g_i^k + g_j^k) & j \in \mathcal{N}(i), \\ -\sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \left(\frac{g_i^k + g_j^k}{2}\right) & i = j, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dabei sei $\mathcal{N}(i) = \{i-2, i-1, i+1, i+2\}$ und $\tau < \frac{1}{4}$. Man zeige:

- a) Für $p = 1$ und $p = 2$ ist die Folge $(\|u^k\|_p)_{k \geq 0}$ mit $\|u^k\|_p := (\sum_{i=0}^{N-1} |u_i^k|^p)^{\frac{1}{p}}$ monoton fallend.
- b) Die Folge der zweiten Momente $(M_2[u^k])_{k \geq 0}$ mit $M_2[u^k] := \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} (u_j^k - \mu)^2$ ist monoton fallend, wobei $\mu := \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} u_j^k$. (4P)

Aufgabe 3

Man zeige: Für die in Aufgabe 2 definierte Folge $(u^k)_{k \geq 0}$ ist deren Entropie monoton wachsend, d.h., $(H(u^k))_{k \geq 0}$ mit

$$H(u^k) := \sum_{j=0}^{N-1} u_j^k \ln u_j^k$$

ist monoton fallend falls $\min_{j \in \{0, \dots, N-1\}} f_j = \min_{j \in \{0, \dots, N-1\}} u_j^0 > 0$.

Hinweis: Man nutze die Konvexität der Funktion $h(x) = x \cdot \ln(x)$ für $x > 0$. (4P)

Aufgabe 4

Man zeige: Eine diagonaldominante Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ ist invertierbar. (2P)

Abgabetermin: 15.07.2009, in der Vorlesung.