

Numerische Methoden der Signal- und Bildverarbeitung
(Blatt 3)

Aufgabe 1

Man zeige: Die Zeilen der Matrix $C_N^{II} = (\frac{2}{N})^{1/2} (\varepsilon_j \cos \frac{j(2k+1)}{2N} \pi)_{j,k=0}^{N-1}$ mit $\varepsilon_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und $\varepsilon_j = 1$ für $j = 1, \dots, N-1$ sind Eigenvektoren der Matrix

$$\mathbf{E} = (1)_{j,k=0}^{N-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & & & 1 \end{pmatrix}. \quad (4P)$$

Aufgabe 2

Man zeige: Die Kosinusmatrix vom Typ II

$$C_N^{II} := (\frac{2}{N})^{\frac{1}{2}} \left(\varepsilon_j \cos \left(\frac{j(2k+1)\pi}{2N} \right) \right)_{j,k=0}^{N-1} \in \mathbb{R}^{N \times N}$$

mit $\varepsilon_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und $\varepsilon_j = 1$ für $j = 1, \dots, N-1$ ist eine orthogonale Matrix, d.h.

$$(C_N^{II})^{-1} = (C_N^{II})^T. \quad (4P)$$

Aufgabe 3

Es seien J_N die Gegenidentität und $D_N := \text{diag}((-1)^k)_{k=0}^{N-1}$. Man zeige, dass für die Kosinusmatrix $C_{N+1}^I \in \mathbb{R}^{(N+1) \times (N+1)}$ vom Typ I gilt:

$$C_{N+1}^I J_{N+1} = D_{N+1} C_{N+1}^I. \quad (4P)$$

Aufgabe 4

Man zeige, dass für die Matrizen J_N und D_N aus Aufgabe 3 und für die Kosinusmatrix vom Typ IV

$$C_N^{IV} := (\frac{2}{N})^{\frac{1}{2}} \left(\cos \frac{(j+\frac{1}{2})(k+\frac{1}{2})\pi}{N} \right)_{j,k=0}^{N-1} \in \mathbb{R}^{N \times N}$$

die Identität

$$(-1)^{N-1} C_N^{IV} J_N D_N = J_N D_N C_N^{IV} \quad (4P)$$

gilt.

Abgabetermin: 13.05.2009, in der Vorlesung.