Universität Duisburg-Essen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. G. Plonka-Hoch

SS 2009

Numerische Methoden der Signal- und Bildverarbeitung

(Blatt 7)

Aufgabe 1

Man entwerfe eine biorthogonale Filerbank perfekter Rekonstruktion mit symmetrischen Tiefpass-Filtern. Dabei sollen die Impulsantworten die Längen 9 und 3 haben. Ein Ansatz für die Übertragungsfunktionen hat also die Form

$$\begin{aligned} H(w) &= h(0) + h(1)(e^{-iw} + e^{iw}) + h(2)(e^{-2iw} + e^{2iw}) + h(3)(e^{-3iw} + e^{3iw}) \\ &\quad + h(4)(e^{-4iw} + e^{4iw}), \\ \tilde{H}(w) &= \tilde{h}(0) + \tilde{h}(1)(e^{-iw} + e^{iw}). \end{aligned}$$

Um gute Tiefpassfilter-Eigenschaften zu sichern, sollen die Filter außerdem die Form

$$H(w) = \left(\frac{1 + e^{-iw}}{2}\right)^4 L(w), \qquad \tilde{H}(w) = \left(\frac{1 + e^{-iw}}{2}\right)^2 \tilde{L}(w)$$

haben, mit passenden trigonometrischen Polynomen. Schließlich fordern wir die Normierung $H(0) = 1$. Man gebe die entsprechenden Filterkoeffizienten aller vier Filter der Filterbank an. (8P)

Aufgabe 2

Man zeige, dass die Hutfunktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & x \in [0, 1) \\ 0 & x \notin [-1, 1) \end{cases}$$

eine Zweiskalengleichung der Form $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n f(2x - n)$ erfüllt und bestimme die Folge (a_n). (4P)

Aufgabe 3

Es seien $V_{j-1} \subset V_j$ abgeschlossene Teilräume des L^2. Es sei P_j ein Projektor von L^2 auf V_j, d.h. $P_j f = P_j^2 f \; \forall f \in L^2$. Man zeige, dass $Q_{j-1} := P_j - P_{j-1}$ genau dann ebenfalls ein Projektor ist, wenn $P_{j-1} P_j = P_{j-1}$ gilt. (4P)

Abgabetermin: 10.06.2009, in der Vorlesung.