Universität Duisburg-Essen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. G. Plonka-Hoch SS 2009

Numerische Methoden der Signal- und Bildverarbeitung

(Blatt 8)

Aufgabe 1

Erstellen Sie eine Prozedur, die die Funktionswerte $\phi(\frac{k}{2^j})$ $(k = 0, \ldots, 3 \cdot 2^j)$ der Daubechies-Skalierungsfunktion berechnet, wobei $\phi(x) = \sum_{k=0}^{3} h_k \phi(2x-k)$ mit $h_0 = \frac{1+\sqrt{3}}{4}$, $h_1 = \frac{3+\sqrt{3}}{4}$, $h_2 = \frac{3-\sqrt{3}}{4}$, $h_3 = \frac{1-\sqrt{3}}{4}$. Stellen Sie die Skalierungsfunktion ϕ graphisch dar! (4P)

Aufgabe 2

Berechnen Sie das Autokorrelationssymbol

$$\Phi(\omega) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(\omega + 2\pi l)|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \phi, \phi(\cdot - k) \rangle e^{-iwk}$$

der Hutfunktion

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 - |x| & x \in [-1, 1] \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass die Beziehung

$$|H(\frac{\omega}{2})|^2 \, \Phi(\frac{\omega}{2}) + |H(\frac{\omega}{2} + \pi)|^2 \, \Phi(\frac{\omega}{2} + \pi) = 2\Phi(\omega) \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

(mit dem Zweikalensymbol $H(\omega)$ von ϕ) gilt. (4P)

Aufgabe 3

Das Meyer-Fenster ϕ ist durch die Fouriertransformierte

$$\hat{\phi}(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \frac{2\pi}{3} \\ \cos[\frac{\pi}{2} \cdot v(\frac{3}{2\pi}|\omega| - 1)] & \frac{2\pi}{3} \le |\omega| \le \frac{4\pi}{3} \end{cases}$$

definiert, wobei v eine glatte Funktion ist die

$$v(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ 1 & x \ge 1 \end{cases} \qquad \text{und } v(x) + v(1-x) = 1$$

erfüllt. Man zeige, dass ϕ verfeinerbar ist mit dem Zweiskalensymbol $m_0(\omega) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \hat{\phi}(2\omega + 4\pi l)$, und dass die Beziehung $|m_0(\omega)|^2 + |m_0(\omega + \pi)|^2 = 1$ für alle $\omega \in \mathbb{R}$ erfüllt ist. (4P)

Aufgabe 4

Stellen Sie das Meyerfenster $\hat{\phi}(\omega)$ für $v(x) = x$ und $v(x) = x^4(35 - 84x + 70x^2 - 20x^3)$ im Frequenzbereich graphisch dar! Stellen Sie außerdem den Betrag des Meyer-Wavelets $|\hat{\psi}(\omega)|$ mit

$$\hat{\psi}(\omega) = e^{\frac{iw}{2}} [\hat{\phi}(\omega + 2\pi) + \hat{\phi}(\omega - 2\pi)] \, \hat{\phi}(\frac{\omega}{2})$$

im Frequenzbereich graphisch dar! (4P)

Abgabetermin: 17.06.2009, in der Vorlesung.