Numerische Methoden der Signal- und Bildverarbeitung

(Blatt 9)

Aufgabe 1

Das „Bracketprodukt“ zweier Funktionen $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ ist durch

$$[\hat{f}, \hat{g}] := \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(\cdot + 2k\pi) \overline{\hat{g}(\cdot + 2k\pi)}$$

definiert.

Man zeige:

a) $[\alpha \hat{f}, \hat{g}] = \alpha [\hat{f}, \hat{g}] = [\hat{f}, \overline{\alpha \hat{g}}] \quad (\alpha \in L_{2\pi}^\infty)$

b) $f \perp g(\cdot - k)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ genau dann, wenn $[\hat{f}, \hat{g}] = 0$ f.ü. (4P)

Aufgabe 2

Erstellen Sie eine Prozedur zur Anwendung des Zerlegungsalgorithmus der schnellen Wavelet-Transformation. Für gegebene Filterfolgen (h_k) und (g_k) sowie eine vorgegebene Anzahl J von Leveln ist dabei ein Datenvektor $\mathbf{a}^0$ in die Vektoren $\mathbf{a}^{-J}, \mathbf{c}^{-J}, \dots, \mathbf{c}^{-1}$ zu zerlegen. Wenden Sie die Prozedur für die Filterfolgen $(h_k), (g_k)$ mit

$$h_0 = \frac{1 + \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, h_1 = \frac{3 + \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, h_2 = \frac{3 - \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, h_3 = \frac{1 - \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, h_k = 0 \quad k \notin \{0, 1, 2, 3\}$$

sowie $g_k = (-1)^k h_{-k+1} \quad (k \in \mathbb{Z}), J = 3$ und $\mathbf{a}^0 = (\sin(\frac{k}{5}))_{k=0}^{63}$ an! (6P)

Aufgabe 3

Erstellen Sie eine Prozedur für den Rekonstruktionsalgorithmus der schnellen Wavelet-Transformation. Für gegebene Filterfolgen $(h_k), (g_k)$ ist dabei aus den vorgegebenen Vektoren $\mathbf{a}^{-J}, \mathbf{c}^{-J}, \mathbf{c}^{-J+1}, \dots, \mathbf{c}^{-1}$ der Datenvektor $\mathbf{a}^0$ zu rekonstruieren. Wenden Sie die Prozedur für die Filterfolgen $(h_k), (g_k)$ mit

$$h_3 = \frac{1 - \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, h_2 = \frac{3 - \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, h_1 = \frac{3 + \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, h_0 = \frac{1 + \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, h_k = 0 \quad k \notin \{0, 1, 2, 3\}$$

sowie $g_k = (-1)^k h_{-k+1} \quad (k \in \mathbb{Z})$ und die in Aufgabe 2 erhaltenen Vektoren $\mathbf{a}^{-J}, \mathbf{c}^{-J}, \dots, \mathbf{c}^{-1}$ an. (6P)

Abgabetermin: 24.06.2009, in der Vorlesung.