

GLOBALE KONVERGENZ VON VERFAHREN ZUR  
NICHTLINEAREN APPROXIMATION

R. Schaback

This contribution discusses the global convergence behavior of iterative algorithms solving nonlinear approximation problems via a sequence of linear approximation problems. Essentially there are two sufficient conditions for global convergence:

- 1) The algorithm should have only critical points as accumulation points.
- 2) The parametrization should imply that the parameters of refined approximations have accumulation points.

For some important nonlinear families of approximating functions it is proved that the above conditions hold, provided that the parametrization is restricted to suitable subfamilies.

### 1. Einführung

Es sei  $A \subset \mathbb{R}^k$  ein offener Parameterbereich, der durch eine Fréchet - differenzierbare Abbildung  $F : A \rightarrow G = F(A) \subset C(T)$  auf eine (i.a. nicht lineare) Menge  $G$  im Raum  $C(T)$  der stetigen Funktionen auf einem Kompaktum  $T$  abgebildet werde. Die Norm auf  $C(T)$  spielt in dieser Arbeit keine besondere Rolle; dadurch wird die gleichzeitige Behandlung von  $L_p$ - und Tschebyscheff- Approximation möglich.

Die Approximation einer gegebenen Funktion  $f \in C(T)$  durch Funktionen aus  $G = F(A) \subset C(T)$  soll durch das folgende, mit (1) bezeichnete Verfahren geschehen (Osborne-Watson [12], Cromme [6-9], Schaback [15], Braess [2], Hettich [10], Hoffmann [11]) :

START: Wähle  $a_0 \in A$ , eine Konstante  $K \in (0, \infty]$  und setze  $i = 0$ .

ITERATION: Gegeben sei  $a_i \in A$ . Es sei  $G_i := F'_{a_i}(\mathbb{R}^k)$  der Tangentialraum zu  $G = F(A)$  in  $F(a_i)$  (als Bild des  $\mathbb{R}^k$  unter der Fréchet - Ableitung  $F'_{a_i}$  von  $F$  in  $a_i \in A$ ).

Schritt 1: Man berechne  $b_i \in \mathbb{R}^k$  als Lösung des (im Falle  $K < \infty$  restringierten) linearen Approximationsproblems.

$$(2) \quad \| f - F(a_i) - F'_{a_i}(b) \| = \text{Min! über } b \in \mathbb{R}^k \text{ mit } \|b\| \leq K$$

Schritt 2 : Man bestimme eine Schrittweite  $\lambda_i > 0$  mit

$$(3) \quad a_{i+1} := a_i + \lambda_i b_i \in A$$

$$(4) \quad \|f - F(a_{i+1})\| \leq \|f - F(a_i)\|.$$

Dies geschieht i.a. durch näherungsweise Lösung der Minimierungsaufgabe

$$\|f - F(a_i + \lambda b_i)\| = \text{Min!}$$

über  $\lambda \geq 0$  mit der Nebenbedingung (3).

Mit (3) kann dann die Iteration wiederholt werden. Die Erfüllbarkeit von (4) folgt sofort aus (2) und der Differenzierbarkeit von  $F$ .

Im Gegensatz zu den oben angeführten Arbeiten zu Verfahren dieses Typs soll in dieser Arbeit das globale Konvergenzverhalten im Mittelpunkt stehen. Naturgemäß spielt daher der für die lokale Konvergenz zentrale Begriff der starken Eindeutigkeit keine so große Rolle. Es zeigt sich vielmehr, daß die globalen Konvergenzüberlegungen aufspaltbar sind in zwei grundverschiedene, aber einfach separat zu behandelnde Teile:

Schritt A : Ist  $a \in A$  nicht kritisch, d. h. gibt es ein  $b \in \mathbb{R}^k$  mit

$$(5) \quad \|f - F(a) - F'_a(b)\| < \|f - F(a)\|,$$

so kann  $a$  kein Häufungspunkt einer durch das Verfahren erzeugten Folge  $\{a_i\}$  sein.

Schritt B : Eine Folge  $\{a_i\}$  mit (4) besitzt Häufungspunkte in  $A$ .

Der Schritt A besteht in einer lokalen Untersuchung des vorgelegten Verfahrens, während Schritt B eine globale Eigenschaft der gegebenen Funktionenfamilie darstellt, die sich unabhängig vom verwendeten Verfahren in einer Reihe von Fällen durch geeignete Parametrisierungen erzwingen läßt. Insofern benötigt man keine globalen Eigenschaften des zugrundeliegenden Verfahrens, sondern lediglich eine geeignete Parametrisierung der gegebenen Funktionenfamilie, um globale Konvergenz zu sichern.

Die Notwendigkeit der Einschränkung auf kritische Punkte und der Schrittweitenoptimierung in Schritt 2 des Verfahrens zeigt

BEISPIEL 1 Es sei  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  gegeben durch  $F(\alpha) = (\cos \alpha, \sin \alpha)$  und  $f := (1 + \sqrt{3}, 0)$  sei zu approximieren.

Statt des Schrittes 2 des Verfahrens werde  $\alpha_{i+1}$  aus

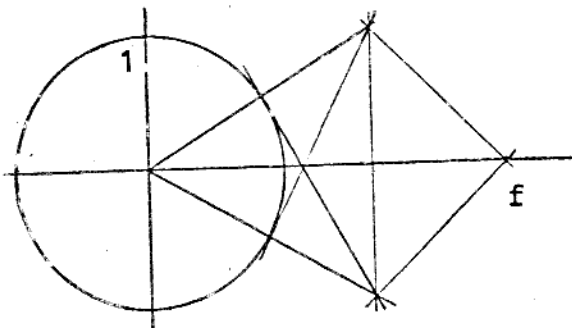
$$(r_{i+1} \cos \alpha_{i+1}, r_{i+1} \sin \alpha_{i+1}) := F(\alpha_i) + F'_{\alpha_i}(\beta_i)$$

mit  $|\alpha_i - \alpha_{i+1}| \leq \pi$  bestimmt. Die Iteration führt bei Start mit

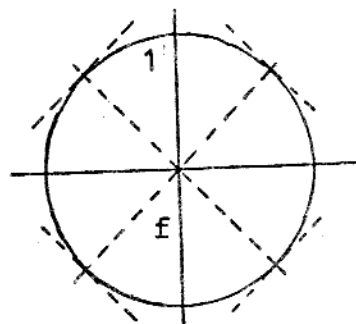
$\alpha_0 \in (-\pi/2, +\pi/2)$ ,  $\alpha_0 \neq 0$  zum Iterationskäfig

$+\pi/6, -\pi/6, +\pi/6, -\pi/6, \dots$ , wobei für jeden zweiten Schritt (4) verletzt ist.

Dies unterstreicht die Notwendigkeit, (4) durch geeignete Schrittweiten zu erzwingen.



Skizze 1



Skizze 2

Approximiert man dagegen (vgl. Skizze 2) den Punkt  $f = (0,0)$ , so führt der Start des Verfahrens für jedes  $\alpha_0 \in (k\pi/2, (k+1)\pi/2)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , zur quadratischen Konvergenz gegen die (stark eindeutige) lokal beste Approximation  $k\pi/2 + \pi/4$ . Der Start in den kritischen Punkten  $\alpha_0 = k\pi/2$  führt zu keiner Verbesserung, d. h. das Verfahren ist global konvergent gegen kritische Punkte (die, wie man sieht, nicht notwendig lokal beste, geschweige denn global beste Approximationen sind).

## 2. Nicht-Konvergenz in nicht-kritischen Punkten

Der folgende Satz beinhaltet die Aussage des Schrittes A für das Verfahren (1) :

SATZ 1. Es sei F stetig Fréchet - differenzierbar in einer Umgebung U von  $a \in A$  und es gelte (5). Dann existieren  $\epsilon, \delta, \lambda^+ > \lambda^- > 0$ , so daß für alle

(6)  $b \in K_\delta(a) := \{b \in \mathbb{R}^k \mid \|a-b\| \leq \delta\} \subset U$  und

(7)  $c \in \mathbb{R}_K^k := \{c \in \mathbb{R}^k \mid \|c\| \leq K\}$ ,  $0 < K < \infty$ ,

mit

$$(8) \quad \|f - F(b) - F'_b(c)\| = \min_{\gamma \in \mathbb{R}_K^k} \|f - F(b) - F'_b(\gamma)\|$$

und für alle  $\lambda \in (\lambda^-, \lambda^+)$  stets

$$(9) \quad b + \lambda c \in A \text{ und}$$

$$(10) \quad \|f - F(b + \lambda c)\| \leq \|f - F(b)\| - \varepsilon.$$

Bei Start in  $K_\delta(a)$  liefert ein Schritt des Verfahrens (1) also mindestens eine Verbesserung um  $\varepsilon$ , auch wenn die Schrittweite  $\lambda$  nicht optimal gewählt wird. Es ist ferner zu bemerken, daß die Lösungen  $c$  des Approximationsproblems (8) nicht notwendig eindeutig zu sein oder von  $b$  stetig abzuhängen brauchen. Dies macht einen einfachen Beweis des Satzes durch Stetigkeitsüberlegungen unmöglich.

Beweis zu Satz 1: Aus (5) folgt die Existenz von  $c_a \in \mathbb{R}_K^k$  und  $\delta_1 > 0$  mit

$$\|f - F(a) - F'_a(c_a)\| \leq \|f - F(a)\| - \delta_1.$$

Es gibt dann ein  $\delta_2 \in (0, 2 \cdot K)$ , so daß  $K_{\delta_2}(a)$  in  $A$  liegt und

$$\phi(b) := \|f - F(b)\| - \|f - F(b) - F'_b(c_a)\| \geq \delta_1/2$$

auf  $K_{\delta_2}(a)$  gilt. Außerdem sei  $\delta_2$  so klein, daß für alle

$b \in K_{\delta_2}(a)$ ,  $b + c \in K_{\delta_2}(a)$  stets

$$\|F(b + c) - F(b) - F'_b(c)\| \leq \frac{\delta_1}{3K} \|c\|$$

gilt. Für  $\delta := \frac{\delta_2}{2}$ ,  $\varepsilon := \frac{\delta_1 \delta_2}{16K}$ ,  $\lambda^+ := \frac{\delta_2}{2K}$ ,  $\lambda^- := \frac{\lambda^+}{2}$ ,  $\lambda \in (\lambda^-, \lambda^+) \subset (0, 1)$

und eine Lösung  $c_b$  von (8) für  $b \in K_\delta(a)$  gilt dann (9) wegen

$$\|b + \lambda c_b - a\| \leq \delta + \lambda^+ \cdot \|c_b\| \leq \frac{\delta_2}{2} + \frac{\delta_2}{2K} \cdot K \leq \delta_2$$

und (10) wegen

$$\begin{aligned} \|f - F(b + \lambda c_b)\| &\leq \|f - F(b)\| - \lambda(\|f - F(b)\| - \|f - F(b) - F'_b(c_b)\|) \\ &\quad + \|F(b + \lambda c_b) - F(b) - \lambda F'_b(c_b)\| \\ &\leq \|f - F(b)\| - \lambda^-(\|f - F(b)\| - \|f - F(b) - F'_b(c_a)\|) \\ &\quad + \frac{\delta_1}{8K} \cdot \lambda^+ \cdot K \\ &\leq \|f - F(b)\| - \frac{\delta_2}{4K} \cdot \frac{\delta_1}{2} + \frac{\delta_1}{8K} \cdot \frac{\delta_2}{2K} \cdot K. \end{aligned}$$

Die Einschränkung auf  $\mathbb{R}_K^k$  mit  $0 < K < \infty$  ist nicht immer notwendig:

SATZ 2. Ist  $F'_a$  umkehrbar, so gilt Satz 1 auch für  $K = \infty$ .

Beweis: Schränkt man die Umgebung  $U$  von  $a$  so ein, daß

$\|F'_a - F'_b\| \leq 1/2 \|F'_a\|^{-1}$  für alle  $b \in U$  gilt, so folgt für jede Lösung  $c_b$  von (8) die Abschätzung

$$(11) \quad \|c_b\| \leq 4 \cdot \|F'_a\| \cdot \sup_{b \in U} \|F(b) - f\| =: K$$

aus

$$\begin{aligned} \|c_b\| &\leq \|F'_a\| \cdot \|F'_a(c_b)\| \\ &\leq \|F'_a\| \cdot \|F'_a(c_b) - F'_b(c_b) + F'_b(c_b)\| \\ &\leq 1/2 \|c_b\| + \|F'_b(c_b) + F(b) - f + f - F(b)\| \cdot \|F'_a\| \\ &\leq 1/2 \|c_b\| + 2 \|F(b) - f\| \cdot \|F'_a\|. \end{aligned}$$

Das Verfahren läuft also exakt so ab, als hätte man die Konstante  $K$  aus (11) von vornherein fixiert. Damit ist der Beweis von Satz 1 übertragbar.

Satz 2 verdeutlicht, daß die Umkehrbarkeit von  $F'_a$  ebenso wie die lokale starke Eindeutigkeit der zu berechnenden Approximation nur für die lokalen (Cromme [6]), nicht aber für die globalen Konvergenzaussagen wichtig ist.

### 3. Globale Konvergenzaussagen.

Der oben angedeutete Schritt B zum Beweis globaler Konvergenzeigenschaften kann ohne jeden Bezug zu irgendeinem numerischen Verfahren axiomatisch formuliert werden:

DEFINITION: Eine Parameterabbildung  $F : A \rightarrow C(T)$  heißt invers-kompakt bezüglich  $f \in C(T)$ , wenn jede Folge  $\{a_i\} \subset A$  mit (4) mindestens einen Häufungspunkt in A hat.

Dann erhält man zur globalen Konvergenz den einfachen

SATZ 3. Es sei  $F : A \rightarrow C(T)$  eine Parameterabbildung auf einer offenen Menge  $A \subset \mathbb{R}^k$  und  $V : A \rightarrow A$  beschreibe ein Iterationsverfahren

$$(12) \quad a_i := V(a_{i-1}) = V^i(a_0), \quad a_0 \in A.$$

Unter den Voraussetzungen

$$(13) \quad F \text{ ist invers-kompakt bezüglich } f \in C(T)$$

$$(14) \quad \| f - F(V(a)) \| \leq \| f - F(a) \| \text{ für alle } a \in A$$

(15) Ist  $F(a)$  nicht  $\left. \begin{array}{l} \text{kritischer Punkt} \\ \text{lokal beste Approximation} \end{array} \right\}$  zu  $f$ ,

so ist  $a$  nicht Häufungspunkt einer Folge  $\{a_i\} \subset A$  mit (12)

folgt dann für jedes  $a_0 \in A$  die Existenz eines Häufungspunktes  $a \in A$  der Folge (12),

und  $F(a)$  ist  $\left. \begin{array}{l} \text{kritischer Punkt} \\ \text{lokal beste Approximation} \end{array} \right\}$  zu  $f$ .

Beweis : Aus (14) folgt (4) für die Folge (12). Nach (13) muß (12) mindestens einen Häufungspunkt in  $A$  haben, der nach (15) die Behauptung des Satzes erfüllt.

Wie immer muß auch hier eine durch geeignete Axiomatisierung herbeigeführte Vereinfachung der Beweisführung erkaufte werden durch den erschwerten Nachweis des Erfülltseins der Axiome. Zur Illustration dient das.

BEISPIEL 2. Es sei  $G$  eine Funktionenklasse in  $C(T)$ ,  $T = [a, b] \subset \mathbb{R}$ , und  $f$  sei eine Funktion aus  $C(T)$  mit einer "Minimalfolge"  $\{g_i\} \subset G$ , die

$$\| g_{i+1} - f \| \leq \| g_i - f \| \text{ und}$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \| g_i - f \| = \inf_{g \in G} \| g - f \|^2$$

erfüllt, wobei  $\{g_i\}$  nicht gleichmäßig in  $T$ , sondern nur gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von  $(a, b)$  gegen eine Grenzfunktion  $g \in G$  konvergiert. Diese Situation ist typisch für Ausartungsfälle bei rationalen Funktionen, Exponentialsummen oder allgemeineren  $\gamma$ -Polynomen. Gäbe es eine invers-kompakte globale Parametrisierung  $F : A \rightarrow G = F(A)$  mit  $A \subset \mathbb{R}^k$  und  $g_i = F(a_i)$  sowie  $g = F(a)$  und  $a_i \rightarrow a$  für  $i \rightarrow \infty$ , so wäre  $F$  nicht stetig in der Normtopologie und a fortiori nicht stetig Fréchet-differenzierbar. Will man größtmögliche Allgemeinheit erzielen, so hat man also zwischen inverser Kompaktheit und Stetigkeit von  $F$  zu wählen. Da beide Eigenschaften für numerische Zwecke nicht wesentlich abgeschwächt werden können, hat man durch einschränkende Zusatzstrategien Auswertungen der obigen Form auszuschalten. Dies wird unten in einigen wichtigen Spezialfällen geschehen.

Bemerkungen: 1) Es ist zu hoffen, daß die Anwendung des Newton-Verfahrens in der von Hettich [10] vorgeschlagenen Form wegen der zusätzlichen Informationen zweiter Ordnung es erlauben wird, Satz 3 in der für lokal beste Approximationen gültigen verschärften Form anzuwenden.

Dazu ist der Nachweis der Verschärfung von (15) durchzuführen.

2) Viele Existenzbeweise für beste Approximationen benutzen Schlüsse, die ähnlich dem im Begriff der inversen Kompaktheit verwendet ist. Ein wesentlicher Unterschied liegt aber darin, daß die Grenzfunktion Bild eines Parameters aus der offenen Parametermenge sein muß. Wie im Beispiel 2 schon angedeutet wurde, ist dies i. a. nicht ohne Zusatzaufwand erreichbar.

#### 4. Rationale Approximation

Bereits in diesem relativ einfachen Fall können Unannehmlichkeiten analog zum Beispiel 2 auftreten. Diese lassen sich allerdings vermeiden, wenn man wie bei Werner [16] (vgl. auch Collatz [5]) das Walsh - Diagramm bester Approximationen für wachsenden Zähler- bzw. Nennergrad  $l$  bzw.  $r$  schrittweise aufbaut. Ist etwa für  $l, r \geq 1$  eine beste Approximation  $g_{l,r}$  in der Klasse  $R_{l,r}$  der rationalen Funktionen mit Zählergrad  $l$  und Nennergrad  $r$  (mit in  $T$  positivem Nenner) zu bestimmen, so kann man (vgl. [16]) davon ausgehen, daß  $\|g_{l,r} - f\| < \|g_{l-1,r-1} - f\|$  gilt.

Startet man mit der üblichen Parametrisierung  $F$  das Verfahren (1) mit der in  $R_{l,r}$  eingebetteten Approximation  $g_{l-1,r-1} = F(a_0)$ , die in  $R_{l,r}$  nicht kritisch sein kann, so hat man nach einem Schritt einen Gewinn  $\epsilon > 0$  und das Verfahren läuft auf der offenen Menge  $A$  der Parameter  $a$  mit  $\|f - F(a)\| < \|F(a_0) - f\| - \epsilon/2$  ab. Nach den schon von Werner [16] gezogenen Schlüssen ist die so eingeschränkte Parametrisierung invers - kompakt und stetig Fréchet - differenzierbar. Außerdem ist die beste Approximation stark eindeutig (Cheney [4], Schaback [14]) und die Fréchet - Ableitungen sind umkehrbar. Somit liefern Satz 2,3 und die Resultate von Cromme [6] den

SATZ 4. Bei der schrittweisen Durchrechnung des Walsh - Diagramms analog zu Werner [16] ist in allen zu bearbeitenden Fällen das Verfahren (1) global quadratisch konvergent; es kann  $K = \infty$  und fast immer  $\lambda_i = 1$  gesetzt werden.

#### 5. Positive Exponentialsummen

Parametrisiert man die Menge  $E_n^+$  der positiven Exponentialsummen in der üblichen Weise, so kann man völlig analog zum rationalen Fall schrittweise die besten Approximationen in  $E_1^+, E_2^+, \dots$  berechnen:

START: Gilt  $f(t) = - \|f\|$  für ein  $t \in T$ , so ist 0 die beste Approximation in allen  $E_n^+$ . Andernfalls beginne man den Algorithmus (1) in  $E_1^+$  mit der Funktion  $g_0 = 1/2 \cdot (\|f\| + \min_{t \in T} f(t))$ .

ITERATION: In  $E_n^+$  für  $n > 1$  beginne man den Algorithmus (1) auf der in üblicher Weise eingebetteten Optimallösung  $g_{n-1}$  aus  $E_{n-1}^+$ , sofern  $g_{n-1} - f$  negativ ist an den äußeren von  $2n-1$  aufeinanderfolgenden Alternationspunkten. Andernfalls ist  $g_{n-1}$  bereits beste Approximation zu  $f$  für alle  $N > n$  und das Verfahren kann abgebrochen werden. Hat die Alternante von  $g_{n-1}$  eine Länge  $\geq 2n+1$ , so kann  $g_n := g_{n-1}$  gesetzt und ohne Rechnung der nächste Schritt durchgeführt werden.

Man erhält dann den

SATZ 5. Für jeden Schritt ist das Verfahren (1) global quadratisch konvergent und es kann  $K = \infty$  sowie fast immer  $\lambda_i = 1$  gesetzt werden.

Beweis: durch Verifikation der Voraussetzungen der Sätze 2 und 3 mit Standardschlüssen der Exponentialapproximation, wobei zu bemerken ist, daß der Algorithmus bereits nach einem Schritt in  $E_n^+ \setminus E_{n-1}^+$  arbeitet. Die starke Eindeutigkeit nicht ausgearteter Approximationen aus  $E_n^+$  folgt aus [14], womit wieder die Resultate von [6] anwendbar werden.

## 6. Allgemeine Exponentialsummen

Mit der Funktion

$$\phi(x) = \begin{cases} |x| & |x| \leq 1 \\ 1/2 (1 + x^2) & |x| \leq 1 \end{cases} \in C^1(\mathbb{R}),$$

und reellen  $\lambda_1, \dots, \lambda_k, a_1, \dots, a_k$  sei das lineare Differentialgleichungssystem

$$u_i' = \lambda_i u_i + u_{i+1} \quad (1 \leq i \leq k), \quad u_{k+1} := 0$$

$$u_i(0) = a_i \prod_{j=1}^{i-1} (1 + \phi(\lambda_j)) \quad (1 \leq i \leq k)$$

vorgegeben. Mit Induktion folgt daraus

$$u_i(x) = \sum_{j=i}^k u_j(0) \Delta_t^{k-j}(\lambda_j, \dots, \lambda_k) e^{tx} \quad (1 \leq i \leq k).$$

Auf der Menge

$$\hat{A} = \{(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n) \mid -1 \leq b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n \leq 1\}$$

wird nun folgendermaßen eine Parametrisierung der verallgemeinerten Exponentialsummen konstruiert: ( $b_0 := -1, b_{n+1} := +1$ )

Für  $l, k$  mit  $-1 = b_{l-1} < b_l \leq \dots \leq b_k < b_{k+1} = 1, 1 \leq l \leq k \leq n$

bilde man  $\lambda_i := b_i / (1 - b_i^2) (1 \leq i \leq k)$

und setze

$$F(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n) := \sum_{j=i}^k a_j \prod_{i=1}^{j-1} (1 + \phi(\lambda_i)) \Delta_t^{k-j} (\lambda_j, \dots, \lambda_k) e^{tx} \\ = u_1(x)$$

Auf  $\hat{A}^\circ = \{(a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_n) \mid -1 < b_1 \leq \dots \leq b_n < 1\}$

ist  $F$  stetig differenzierbar. Nach Standardschlüssen der Exponentialapproximation folgt aus

$$\|F(a)\| \leq K, a = (a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n) \in \hat{A}^\circ$$

(d. h.  $\|u_1(x)\| \leq K$ ) die Existenz einer von  $a$  unabhängigen Konstanten  $K^*$  mit

$$|u_1^{(j)}(0)| \leq K^* \quad 0 \leq j \leq n-1, K^* \geq K.$$

Mit  $|u_{i+1}^{(j)}(0)| \leq |u_i^{(j+1)}(0)| + |\lambda_i| |u_i^{(j)}(0)|$

folgt per Induktion

$$|u_i(0)| \leq \prod_{j=1}^{i-1} (1 + |\lambda_j|) \cdot K^*$$

$$\leq \prod_{j=1}^{i-1} (1 + \phi(\lambda_j)) K^*$$

und somit

$$|a_i| \leq K^* \quad (1 \leq i \leq n).$$

Dies ermöglicht

SATZ 6. Der Algorithmus erzeugt bei Start in  $\hat{A}^\circ$  eine Folge, die entweder

- a) eine Folge erzeugt, die einen Häufungspunkt  $\hat{a} \in \hat{A}$  hat, der dann notwendig kritischer Punkt zu  $f$  ist  
oder b) nur Häufungspunkte in  $(A \setminus \hat{A}) \cap [-K, K]^n \times [-1, +1]^n$  für  $K > 0$  hat (d. h. ausgeartete Approximationen sind Limiten).

Der Beweis ist eine einfache Kombination des Satzes 1 mit der Kompaktheit von  $A \cap [-K, K]^n \times [-1, +1]^n$  und der Tatsache, daß die Parameter der erzeugten Folge nach der obigen Überlegung in solch einem Kompaktum liegen.

Satz 6 kann naturgemäß nicht als befriedigende Lösung der numerischen Approximation durch Exponentialsummen angesehen werden, denn nur in recht einschränkenden Fällen sind kritische Punkte bei Exponentialsummen auch (eventuell nur lokal) beste Approximationen. Andererseits ist allein aus Informationen über  $F'_a$  kein Verfahren denkbar, das bei Start in einen kritischen Punkt diesen verlassen würde. Dazu wären Informationen "zweiter Ordnung" nötig (Hettich [10]). Andererseits besteht Hoffnung (Braess [2]), durch sinnvolle Untergliederung der Exponentialsummen und schrittweise Durchrechnung wie in den beiden vorhergehenden Abschnitten sämtliche kritischen Punkte und damit alle lokal und global besten Approximationen systematisch zu berechnen.

### 7. Rationale Splinefunktionen

Die vom Verfasser, H. Werner und D. Braess [3, 13, 15, 17] untersuchten rationalen Splinefunktionen lassen sich parametrisieren auf der Menge

$$\hat{A} = \mathbb{R} \times (-1, +1)^{n+2} \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^{n+4},$$

indem zunächst mit

$$F_1 : \hat{A} \rightarrow A = \mathbb{R} \times (0, \infty)^{n+2} \times \mathbb{R},$$

$$F_1(\hat{y}_0, \hat{M}_0, \dots, \hat{M}_{n+1}) = \left( \hat{y}_0, \frac{1 + \hat{M}_0}{1 - \hat{M}_0}, \dots, \frac{1 + \hat{M}_{n+1}}{1 - \hat{M}_{n+1}}, \hat{y}_{n+1} \right)$$

die Menge  $\hat{A}$  stetig differenzierbar auf die in [15] verwendete Parametermenge abgebildet wird. Man erhält über die zusammengesetzte Parametrisierung  $F$  den mit den in [15] geschilderten numerischen Erfahrungen übereinstimmenden

SATZ 7: Der Algorithmus erzeugt bei Start in  $\hat{A}$  eine Folge, die entweder

- a) gegen eine beste Approximation  $F(a)$ ,  $a \in \hat{A}$ , zu  $f$  konvergiert oder
- b) nur Häufungspunkte auf dem Rand von  $\hat{A}$  hat.

Zum Beweis ist nur zu bemerken, daß aus den Argumenten in [15] folgt, daß jeder kritische Punkt  $F(a)$  mit  $a \in A$  bereits beste Approximation ist.

Bei den üblichen Spline - Funktionen mit freien Knoten sind noch ungünstigere Resultate zu erwarten als bei den Exponentialsummen. Eine genauere Untersuchung steht noch aus; die bisher durchgeführten numerischen Experimente zeigen stets globale Konvergenz gegen kritische Punkte.

- [1] BRAESS, D.: Die Konstruktion der Tschebyscheff - Approximierenden bei der Anpassung mit Exponentialsummen, J. of Approx. Th. 3, 261 - 273 (1970)
- [2] BRAESS, D.: Zur numerischen Stabilität des Newton - Verfahrens bei der nichtlinearen Tschebyscheff - Approximation, dieser Band, - (1976)
- [3] BRAESS, D. und WERNER, H.: Tschebyscheff - Approximation mit einer Klasse rationaler Spline - Funktionen II, J. of Approx. Th. 10, 379 - 399 (1974)
- [4] CHENEY, E. W.: Introduction to Approximation Theory, New York: Mc Graw - Hill 1966
- [5] COLLATZ, L.: Tschebyscheffsche Annäherung mit rationalen Funktionen, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 24, 70 - 78 (1960)
- [6] CROMME, L.: Eine Klasse von Verfahren zur Ermittlung bester nichtlinearer Tschebyscheff - Approximationen, Num. Math. 25, 447 - 459 (1976)
- [7] CROMME, L.: Bemerkungen zur numerischen Behandlung nichtlinearer Aufgaben der Tschebyscheff - Approximation, in: Numerische Methoden der Approximationstheorie, Bd. III, Basel - Stuttgart: Birkhäuser 1976
- [8] CROMME, L.: Zur Tschebyscheff - Approximation bei Ungleichungsnebenbedingungen im Funktionenraum, dieser Band, - (1976)
- [9] CROMME, L.: Numerische Methoden zur Behandlung einiger Problemklassen der nichtlinearen Tschebyscheff - Approximation mit Nebenbedingungen, zur Veröffentlichung eingereicht
- [10] HETTICH, R.: Ein Newton - Verfahren zur Lösung nichtlinearer Approximationsprobleme, dieser Band, - (1976)
- [11] HOFFMANN, K.-H.: Approximationen mit Lösungen von Differentialgleichungen, dieser Band, - (1976)

- [12] OSBORNE, M. R., und WATSON, G. A.: An algorithm for minimax approximation in the nonlinear case, Computer Journal 12, 63 - 68 (1969)
- [13] SCHABACK, R.: Spezielle rationale Splinefunktionen, J. of Approx. Th. 7, 281 - 292 (1973)
- [14] SCHABACK, R.: On Alternation Numbers in Nonlinear Chebyshev Approximation, J. of Approx. Th. (erscheint demnächst)
- [15] SCHABACK, R.: Calculation of Best Approximations by Rational Splines, erscheint in den Proceedings des Approximation Theory Symposium, Austin 1976, New York - London: Academic Press
- [16] WERNER, H.: Die konstruktive Ermittlung der Tschebyscheff - Approximierenden im Bereich der rationalen Funktionen, Arch. Rat. Mech. Anal. 11, 368 - 384 (1962)
- [17] WERNER, H.: Tschebyscheff - Approximation mit einer Klasse rationaler Spline - Funktionen, J. of Approx. Th. 10, 74 - 92 (1974)

Prof. Dr. R. Schaback

Lehrstühle für Numerische  
und Angewandte Mathematik  
Lotzestraße 16 - 18

D - 3400 - Göttingen

Bundesrepublik Deutschland

Diese Arbeit entstand im Rahmen des von der Deutscher Forschungsgemeinschaft geförderten Sonderforschungsbereichs 72 "Approximation und Optimierung in einer anwendungsbezogenen Mathematik".