Die Beiträge von Carl Friedrich Gauß zur numerischen Mathematik

Robert Schaback, Göttingen

Zusammenfassung

Bekanntlich war der *princeps mathematicorum* ein hervorragender Zahlenrechner [6], wenn er sich auch mehrfach über den *todten mechanischen Calcül*[1] beklagte. Aber *diejenigen, die w i r k l i c h rechnen, finden doch leicht selbst, was zu ihrem Frieden dient*[2], und so hat Gauß immer wieder die von ihm benötigten numerischen Methoden kurzerhand selbst entwickelt. Sie umfassen praktisch das gesamte Gebiet der heutigen *Numerischen Mathematik*, sofern man die durch Computer möglich gewordenen Verfahren ausklammert. Besondere Schwerpunkte sind natürlich das Gaußsche Eliminationsverfahren, die Iterationsmethoden nach Gauß–Seidel und Gauß–Jacobi, das Gauß–Newton–Verfahren, Gaußsche Interpolation und Integration, sowie auch das heute als schnelle Fourier–Transformation bezeichnete Verfahren. Der vorliegende Aufsatz ist die überarbeitete schriftliche Fassung[3] eines Vortrags, der 1977 in Göttingen gehalten und im gleichen Jahr publiziert worden ist [59]. Ein ebenfalls 1977 gehaltener Vortrag von H. Heinrich [42] und dessen zugehörige Publikationen [43], [44] setzen etwas andere Schwerpunkte und bilden eine lesenswerte Ergänzung zu dem vorliegenden Aufsatz.

Summary. This paper reviews and summarizes the contributions to numerical mathematics and numerical algorithms by Carl Friedrich Gauss. They include the solution of linear equations by elimination, numerical integration, interpolation, iteration, and what is today called the Fast Fourier Transform (FFT).

1 Einführung

Genaugenommen zwingt das obige Thema dazu, den Begriff *Numerische Mathematik* zu definieren. Zu Gauß' Zeiten gab es glücklicherweise noch keine scharfen Unterteilungen der Mathematik, und auch jetzt ist es wenig sinnvoll, Teilgebiete der Mathematik zu streng voneinander abzugrenzen. Um diesen Schwierigkeiten aus dem Weg zu gehen, befaßt sich daher dieser Beitrag mit den von Gauß verwendeten mathematischen Methoden zur zahlenmäßigen Lösung mathematisch formulierter Probleme. Um zu belegen, dass die Gaußschen Beiträge fast das gesamte heutige Grundwissen an Numerischer Mathematik berührt, wird im folgenden exemplarisch das Lehrbuch [60] herangezogen, wobei allerdings jeder andere Standardtext genau so gut geeignet wäre.

[1] Brief an Olbers, 3.9.1805 (Briefwechsel Gauß-Olbers, Band 1, S. 268)
[2] Brief an Schumacher, 10.10.1835, nach [6], S. 9 (Briefwechsel Gauß-Schumacher, Band 2, S. 422)
[3] unter Mithilfe von S. Krämer bei der früheren und von A. Wittmann bei der jetzigen Version

Mathematische Methoden zur zahlenmäßigen Lösung mathematisch formulierter Probleme finden sich überall in den Gauß'schen Werken, etwa in seinem astronomischen Hauptwerk, der *Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium*[4] [37], 1809, [30, S. 1–288], in den *Beiträgen zur Theorie der algebraischen Gleichungen* ([23], 1850, [26, S. 71–103]) und vielen anderen mehr. In diversen Arbeiten, die eigentlich beispielsweise der Astronomie oder der Geodäsie zuzurechnen sind, bleibt bei Streichung der astronomischen oder geodätischen Dinge ein erheblicher Teil numerischer Mathematik im obigen Sinne übrig. Umgekehrt zeigt sich so die starke Anwendungsbezogenheit der Gaußschen Beiträge zur numerischen Mathematik, wie im folgenden noch auszuführen sein wird.

2 Rechenhilfsmittel

Im Rahmen dieser engen Verbindung von Anwendungswissenschaften und Mathematik fällt bei Gauß besonders auf, dass seine Arbeiten in vielen Fällen den kompletten Weg von der Anwendung über die theoretische Mathematik zu numerischen Methoden und sogar bis hin zu konkreten Rechenvorschriften enthalten. Beispiele dafür finden sich in fast allen unten zitierten Arbeiten. Heutzutage würde man sagen, dass Gauß in seinen Publikationen bis auf die *Programmierungsebene* hinabsteigt:

> *... so wird man doch ... der Zusammenstellung der gebrauchfertigen Vorschriften ein paar Seiten gern eingeräumt sehen.*[5]

Die *Vorschriften* von Gauß beziehen sich auf die Anwendung der damals vorhandenen Rechenhilfsmittel [57], d. h. auf den Gebrauch von Tafeln aller Art. Zur Vereinfachung des Rechnens mit Logarithmentafeln hat Gauß 1812 eine später viel benützte Tafel publiziert [14],[26, S. 244–246], die zur Berechnung des $\log(a+b)$ aus $\log a$ und $\log b$ diente. Eine solche Tafel war schon von Leonelli 1806 in Kurzform angegeben [50] und von Gauß 1808 rezensiert worden [11], [31, S. 121-127]. Die weite Verbreitung dieser Tafel geht aus Gauß' Brief an Wolfgang Bolyai vom 6.3.1832 hervor:

> *Meine kleinen Logarithmentafeln gab ich zuerst in Zach's Monatlicher Correspondenz 1812; sie sind aber seitdem in fast unzähligen Büchern wieder abgedruckt; am leichtesten kannst du sie dir wohl verschaffen in Pasquich: Tabulae logarithmico-trigonometricae 1817, oder in Lalande: Logarithmisch-trigonometrische Tafeln, herausgegeben von Dr. Köhler (oder in ähnlichen von Westphal oder Mollweide etc. etc.)* [6]

Obendrein hat Gauß mehrere Dutzend Spezialtafeln (z. B. für astronomische oder geodätische Aufgaben) konstruiert, die in seinen Werken verstreut sind und hier nicht alle aufgezählt werden können und sollen. Eine auch nicht komplette, aber ausführlichere Darstellung Gauß'scher Tafelwerke findet sich in der Abhandlung *Gauß als Zahlenrechner* von A. Galle [6, S. 16-17]. Von 1802 bis 1851 hat Gauß ferner mindestens zehn weitere Tafelwerke rezensiert [26, S. 241-264]. Schließlich findet sich im Jahre 1834 sogar eine positive Rezension einer Rechenmaschine:

> *Herr Schiereck hat mir ein Modell einer Rechenmaschine gezeigt, welche er zur Ausführung der arithmetischen Operationen erfunden hat. Ich bezeuge mit*

[4] Theorie der Bewegungen der Himmelskörper, die in Kegelschnitten die Sonne umlaufen
[5] [23], 1850, [26], S. 86
[6] [39, S. 113]

Vergnügen, daß diese Maschine den beabsichtigten Zweck sehr leicht erreicht, und daß dieses nach den Verbesserungen, welche der Erfinder an ihr zu machen beabsichtigt, noch mehr der Fall sein wird. Diese sinnreiche Erfindung ist umso schätzbarer, weil diese Maschine mit geringen Kosten hergestellt werden kann. [7]

Insgesamt kann man darauf schließen, dass Gauß über die Rechenhilfsmittel seiner Zeit sehr umfassend informiert war und obendrein selbst neue Rechenhilfsmittel konstruierte. In der heutigen Zeit würde das bedeuten, dass er den Computermarkt kennen und obendrein in einem kleinen Teil seiner Arbeitszeit auch Informatik treiben würde. Genauso wie man heute einen Computer als Benutzer im wesentlichen nach seiner einfachen Handhabung und flexiblen Einsetzbarkeit beurteilt, hat Gauß die Rechenhilfsmittel seiner Zeit im Prinzip denselben Kriterien unterworfen:

Wer nur von Zeit zu Zeit einmal veranlasst wird, einige Logarithmen in den Tafeln aufzusuchen, verlangt von Ihnen hauptsächlich nur möglich grösste Correctheit. Allein für andere, denen die Tafeln ein tägliches Arbeitsgeräth sind, bleiben auch die geringfügigsten Umstände, die auf die Bequemlichkeit des Gebrauchs Einfluss haben können, nicht mehr gleichgültig. Farbe, Stärke und Schönheit des Papiers; Format; Grösse, Schärfe und gefälliger Schnitt der Typen; Beschaffenheit der Druckerschwärze; Anordnung der Zahlen, um das was man sucht ohne Ermüdung des Auges schnell und sicher zu finden; Vorhandensein von allem, was man braucht, aber auch Abwesenheit von allem, was man nicht brauchen mag, und was sonst die leichte Uebersicht nur stören würde, alle diese Umstände erhalten eine gewisse Wichtigkeit bei einem Geschäfte, welches man täglich hundert mal wiederholt. [8]

3 Fehlertheorie

Aber auch die *möglich grösste Correctheit* hat Gauß von allen Logarithmentafeln verlangt. Das erkennt man an seiner Rezension [26], 1851, des 1840 von Vega und Hülsse neu herausgegebenen *Thesaurus Logarithmorum* [63]. Der Autor dieses Werkes hatte jedem, der einen Fehler im Tafelwerk findet, einen Dukaten versprochen. Wenn Vega dieses Versprechen eingehalten hätte,

... so hätte es ihm leicht gehen mögen, wie dem König Shiram, dessen Kornkammern nicht ausreichten, dem Erfinder des Schachspiels die ihm zugesagte Belohnung zu gewähren.

Daß die von Vega ausgebotene Belohnung ... ihm theuer zu stehen kommen konnte, lässt sich schon, ohne alles Nachrechnen, aus einem Umstande erkennen, der leicht zu bestätigen, jedoch meines Wissens anderweit noch nirgends zur Sprache gebracht ist. Dieser Umstand besteht darin, daß in der Tafel für die Logarithmen der trigonometrischen Grössen die Zahlen der Sinuscolumne fast ohne Ausnahme der Summe der Zahlen der Cosinuscolumne und der Tangentencolumne genau gleich sind. Da alle diese Zahlen nur abgekürzte Werthe der irrationalen genauen Grössen sind, so ist klar, daß bei streng richtiger Abkürzung jene Gleichheit nicht Statt finden wird, in allen den Fällen, wo die Abweichungen von den genauen Werthen in der zweiten und dritten Columne

[7] [22][32, Teil I, S. 6] (zu Schiereck vgl. Folkerts, Mitt. Gauß-Ges. 43 (2006) S. 9–29)
[8] [26, S. 253], 1828

> *gleiche Zeichen haben, und ihre Summe mehr als eine halbe Einheit der letzten Decimale beträgt.*[9]

Es spricht für Gauß' großes Gefühl für Fehlereinflüsse, dass er bemerkt, dass die Gleichung

$$\log\sin x = \log\cos x + \log\tan x,$$

die wegen

$$\sin x = \cos x \cdot \tan x$$

für alle positiven Werte der vorkommenden Funktionen gilt, in einem Tafelwerk unmöglich für alle Werte korrekt sein kann, was auch dem heutigen Leser auf den ersten Blick paradox erscheinen mag. Er stellt dazu fest, dass die beiden im obigen Zitat genannten Fälle bei der Rundung jeweils die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ haben; da beide Fälle gleichzeitig eintreten müssen, um eine Abweichung in der Tafel hervorzurufen, wird also etwa ein Viertel der Tafelwerte die obige Gleichung nicht exakt erfüllen. Daraus schließt Gauß auf schätzungsweise 5670 Fehler im Vega'schen Tafelwerk. Durch zusätzliche Überlegungen steigert er schließlich die geschätzte Fehlerzahl auf 47 746.

Nicht nur im obigen Beispiel fällt auf, dass Gauß' Augenmerk sich stark auf die Fehler numerischer Rechnungen richtet. So ist beispielsweise seine Methode der kleinsten Quadrate entstanden aus dem Wunsch, eine möglichst gute Ausgleichung fehlerhafter Messungen zu erhalten. Auch seine Beiträge zur Interpolation und zur numerischen Integration gehen, wie unten noch zu zeigen sein wird, von Fehlerbetrachtungen aus.

In seinem oben schon zitierten astronomischen Hauptwerk *Theoria motus...* [37], 1809, [30, S. 1-288] gibt Gauß ferner eine eingehende Darstellung der Fehlerfortpflanzung:

> *Dahin gehört im ersten Abschnitte eine Digression über den Grad der Genauigkeit, den man im numerischen Calcul bei dem Gebrauche von Tafeln aller Art zu erreichen im Stande ist ...* [10]

Das von Gauß benutzte Fehlerfortpflanzungsgesetz [60, S. 12] ist eine einfache Anwendung des Mittelwertsatzes. Ist etwa $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine stetig differenzierbare Abbildung, die an einem durch eine Störung Δx verfälschten $x \in \mathbb{R}^n$ ausgewertet werden soll, so hat man

$$F(x + \Delta x) - F(x) = \operatorname{grad} F|_\xi \Delta x \tag{1}$$

wo ξ eine Zwischenstelle auf der Strecke von x nach $x + \Delta x$ bezeichnet. Diese Beziehung zeigt, dass der Eingangsfehler Δx sich mit der Ableitung von F multipliziert, um den Ausgangsfehler zu ergeben. Nach diesem Prinzip untersucht Gauß in der *Theoria motus...* eine Anzahl astronomischer Formeln [37, S. 40-45], 1809 auf den

> *gradum praecisionis, quam tabulae vulgares ... permittunt ...* [11]

um für verschiedene Fälle verschiedene Formeln empfehlen zu können. Gauß war also durchaus vertraut mit Dingen, die man heute als numerische Stabilität oder Gutartigkeit von Algorithmen bezeichnet.

4 Lineare Gleichungssysteme

Ebenfalls in der *Theoria motus...* [37], 1809, [30, S. 236f.] gibt Gauß eine erste schriftliche Darstellung seiner Methode der kleinsten Quadrate, in der die Aufgabe, eine Reihe von

[9] [26, S. 259], 1851
[10] [29, S. 53–60], 1809
[11] [37], 1809, [30, S. 40], "... den Grad der Genauigkeit, den die üblichen Tafeln erlauben..."

Meßwerten auszugleichen, durch Aufstellung des Gaußschen Normalgleichungssystems [60, S. 68, 209] gelöst wird; mit Gauß' Worten ist dies ein

> *Principium ..., quod determinatio incognitarum numerica ad algorithmum expeditissimum reducitur ... ... unde harum valores per eliminationem vulgarem elicientur.* [12]

Der Vortrag [43] von H. Heinrich behandelt die Ausgleichsrechnung detaillierter und berücksichtigt auch den Fall des Vorliegens linearer Nebenbedingungen. In diesem Beitrag soll nur auf die *numerischen* Aspekte der Methode der kleinsten Quadrate eingegangen werden, und da ist in erster Linie das Gauß'sche Eliminationsverfahren [60, S. 27–44] zu nennen.

Dies findet sich andeutungsweise schon in der *Theorie motus...* [37], 1809, [30, S. 252] und später genauer in der *Disquisitio de elementis ellipticis Palladis ex oppositionibus annorum 1803, 1804, 1805, 1807, 1808, 1809*[13] [12], 1810, [29, S. 61–64] sowie schließlich im Supplementum [21], 1828, [27, S. 55–93] der *Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae*[14] [19], 1823.

Dieses Verfahren besteht darin, ein gegebenes Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n &= b_3 \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \tag{2}$$

mit einer nichtsingulären Koeffizientenmatrix ($detA \neq 0$) auf eine einfachere Gestalt zu bringen. Zunächst wird durch Vertauschen von Gleichungen oder Unbekannten erreicht, dass $a_{11} \neq 0$ gilt bzw. a_{11} maximalen Betrag hat unter den Elementen der ersten Spalte (Teilpivotisierung) oder den Elementen der gesamten Matrix (Totalpivotisierung). Danach wird von der zweiten Gleichung das $\frac{a_{21}}{a_{11}}$-fache der ersten Gleichung subtrahiert, danach von der dritten Gleichung das $\frac{a_{31}}{a_{11}}$-fache der ersten Gleichung u. s. w.. Dadurch verschwinden die Koeffizienten von x_1 in der 2-ten bis n-ten Gleichung und man erhält das transformierte Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}\,x_2 + a_{13}\,x_3 + \cdots + a_{1n}\,x_n &= b_1 \\ + a_{22}^{(2)}x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 + \cdots + a_{2n}^{(2)}x_n &= b_2^{(2)} \\ + a_{32}^{(2)}x_2 + a_{33}^{(2)}x_3 + \cdots + a_{3n}^{(2)}x_n &= b_3^{(2)} \\ \vdots \qquad & \end{aligned}$$

Danach verfährt man analog mit der 2-ten bis n-ten Gleichung die ja nur noch $n-1$ Unbekannte enthalten, u. s. w.. Das schließlich resultierende Gleichungssystem hat Dreiecksform, was zur einfachen Auflösbarkeit nach $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1$ führt:

> *Herr Prof. GAUSS hat diese* [Eliminations-]*Arbeit sehr bedeutend abgekürzt; den obgleich er die Auflösung auch auf so viele lineäre Gleichungen, als unbekannte Grössen sind, zurückführt, so sind diese Gleichungen so beschaffen,*

[12] [37], 1809, [30, S. 246], "... Prinzip ..., das die numerische Berechnung der Unbekannten auf einen allerleichtesten Algorithmus reduziert... wodurch ihre Werte sich durch gewöhnliche Elimination ergeben.

[13] Abhandlung (von der Berechnung) der elliptischen (Bahn-) Elemente der Pallas aus den Oppositionen der Jahre ...

[14] Theorie der Kombination von Beobachtungen, die minimalen Fehlern unterworfen sind

daß nur die erste alle unbekannten Grössen enthält, aber die zweite von p $[x_1]$, *die dritte von p und q* $[x_2]$, *die vierte von p, q und r* $[x_3]$ *frei ist u. s. w., daher die Bestimmung der unbekannten Grössen in der umgekehrten Ordnung nur noch wenige Mühe macht.*[15]

In den beiden genannten Arbeiten [13] und [21][27, 55-93] gibt Gauß ganz präzise Vorschriften zur numerischen Rechnung formelmäßig an. Obendrein erkennt er, dass für eine positiv definite symmetrische Koeffizientenmatrix

... facile demonstratur divisores ... necessario positivos evadere debere ... [16]

so dass sich die Pivotisierung erübrigt.

Dieses Verfahren ist noch heute eine Standardmethode zur Lösung linearer Gleichungssysteme. Ferner steht es nach wie vor im Mittelpunkt einer speziellen Forschungsrichtung der numerischen Mathematik; einerseits wird das Stabilitätsverhalten des Verfahrens untersucht (u. a. Wilkinson seit 1961, [66]), andererseits interessiert die Frage, ob der Algorithmus optimal ist bezüglich der Anzahl der Rechenoperationen. Durch eine Modifikation des Gauß'schen Algorithmus konnte die letztere Frage negativ entschieden werden; von V. Strassen wurde 1969 bewiesen [62], dass statt der etwa $\frac{n^3}{3}$ Operationen des Gauß'schen Algorithmus eine Modifikation mit etwa $n^{\log_2 7} = n^{2.807\cdots}$ möglich ist. Bis heute ist die Frage nach der in diesem Sinne optimalen Auflösung linearer Gleichungssysteme ungeklärt. Bisher liegt der Rekord bei $\mathcal{O}(n^{2.3727})$ durch Virginia Williams [68], 2012.

Neben dieser direkten Auflösungsmethode für lineare Gleichungssysteme hat Gauß auch die Grundlage für die iterativen Methoden

... methodum quam indirectam vocant ...[17]

gelegt. Leider gibt es keine direkte mathematische Veröffentlichung seiner Gedanken zu diesem Thema; wir sind in dieser Frage auf einen unten zitierten Brief [40] an Gerling vom 26.12.1823 sowie die Festschrift von Richard Dedekind: *Gauß in seiner Vorlesung über die Methode der kleinsten Quadrate* [3], 1901 angewiesen. Das von Gauß verwendete iterative Verfahren, das von Seidel [61] 1873 wiederentdeckt wurde und heute als Einzelschrittverfahren [60, S. 103] bezeichnet wird, besteht darin, das Gleichungssystem (2) bei Vorliegen einer Näherung für die Unbekannten x_i schrittweise zur Verbesserung der Näherung heranzuziehen. Man berechnet schrittweise die neuen Näherungen durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} a_{11}x_1^{\text{neu}} + a_{12}x_2^{\text{alt}} + a_{13}x_3^{\text{alt}} + \ldots &= b_1 \\ a_{21}x_1^{\text{neu}} + a_{22}x_2^{\text{neu}} + a_{23}x_3^{\text{alt}} + \ldots &= b_2 \\ a_{31}x_1^{\text{neu}} + a_{32}x_2^{\text{neu}} + a_{33}x_3^{\text{alt}} + \ldots &= b_3 \end{aligned}$$

indem man die erste Gleichung nach x_1, die zweite nach x_2 unter Einsetzung des schon gefundenen Wertes für x_1 u. s. w. auflöst. Vor der Rechnung hat man natürlich dafür zu sorgen, dass die Diagonalelemente sämtlich nicht verschwinden. Gauß hat dieses Verfahren zur Auswertung der Normalgleichungssysteme, die bei seinen geodätischen Messungen auftraten, sehr häufig verwendet:

Fast jeden Abend mache ich eine neue Auflage des Tableau, wo immer leicht nachzuhelfen ist. Bei der Einförmigkeit des Messungsgeschäfts gibt dies immer eine angenehme Unterhaltung; man sieht dann auch immer gleich, ob

[15] [12], 1810, [29, S. 64]

[16] [13], 1811, [29, S. 22], ... leicht gezeigt werden kann, daß die Divisoren ... notwendig positiv herauskommen müssen ...

[17] [37], 1809, [30, S. 161], ... die Methode, die sie indirekt nennen...

etwas Zweifelhaftes eingeschlichen ist, was noch wünschenswerth bleibt, etc. Ich empfehle Ihnen diesen Modus zur Nachahmung. Schwerlich werden Sie je wieder direct eliminieren, wenigstens nicht, wenn Sie mehr als 2 Unbekannte haben. Das indirecte Verfahren lässt sich halb im Schlafe ausführen, oder man kann während desselben an andere Dinge denken.[18]

Man stelle sich vor, wie Gauß im Laufe des *Messungsgeschäfts* durch Norddeutschland reist und sich in lärmerfüllten Gasthäusern abends eine *angenehme Unterhaltung* verschafft, indem er mal eben *halb im Schlafe* ein lineares Gleichungssystem löst.

Bei vielen linearen Iterationsverfahren ist numerisch zu beobachten, dass sie systematisch zur Überschätzung oder Unterschätzung der wahren Lösung tendieren. Das hat, wie aus der Festschrift Dedekinds hervorgeht [3] [25, S. 301f.], Gauß selbstverständlich auch erkannt und den heute als *Relaxation* [60, S. 101–105] bezeichneten Kunstgriff zur Konvergenzverbesserung angewendet. Durch Einführung eines reellen positiven Relaxationsparameters, den es geeignet zu bestimmen gilt, kann die systematische Über- und Unterschätzung kompensiert werden. Da die heute behandelten großen Gleichungssysteme mit vielen Millionen Unbekannten nur durch iterative Methoden zu lösen sind, gibt es eine enorme Literatur über die Bestimmung günstiger Relaxationsparameter.

Inzwischen hat die Numerische Mathematik iterative Verfahren gefunden, die *zu ihrem Frieden* dienen, aber es war keineswegs leicht, sie zu finden. Man kann die bei gewissen partiellen Differentialgleichungen auftretenden riesigen Gleichungssysteme mit Methoden lösen, deren Komplexität bei fest vorgeschriebener Genauigkeit nur linear mit der Anzahl n der Unbekannten wächst, was gegenüber der direkten Elimination und dem Einzelschrittverfahren ein unglaublicher Fortschritt ist.

5 Nichtlineare Gleichungen

Eine Iterationsmethode hat Gauß auch zur Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme wiederholt verwendet. Ist etwa ein nichtlineares Gleichungssystem durch n Gleichungen der Form

$$\begin{aligned}\Phi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0\\ \Phi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0\\ &\vdots\\ \Phi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0\end{aligned} \tag{3}$$

mit stetig differenzierbaren Funktionen $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$ gegeben, so wird man zunächst jede dieser Gleichungen nach einer Unbekannten aufzulösen versuchen, um dadurch zu einem Gleichungssystem

$$\begin{aligned}x_1 &= \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)\\ x_2 &= \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)\\ &\vdots\\ x_n &= \varphi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)\end{aligned}$$

[18] [40, S. 300], 1823, [28, S. 280–281]

mit stetig differenzierbaren Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ überzugehen. Dann erfolgt die Iteration gemäß den Formeln

$$\begin{aligned} x_1^{\text{neu}} &= \varphi_1(x_1^{\text{alt}}\ , x_2^{\text{alt}}, \ldots, x_n^{\text{alt}}) \\ x_2^{\text{neu}} &= \varphi_2(x_1^{\text{neu}}, x_2^{\text{alt}}, \ldots, x_n^{\text{alt}}) \\ &\vdots \\ x_n^{\text{neu}} &= \varphi_n(x_1^{\text{neu}}, \ldots, x_{n-1}^{\text{neu}}, x_n^{\text{alt}}), \end{aligned} \tag{4}$$

die zur Verbesserung einer Näherung $x_1^{\text{alt}}, x_2^{\text{alt}}, \ldots, x_n^{\text{alt}}$ dienen.

Gauß hat eine Vielzahl nichtlinearer Gleichungssysteme durch solche *Fixpunktverfahren* [60, S. 87–93] gelöst; man findet Beispiele unter anderem in der *Theoria motus...* [37], 1809, z. B. das Keplersche Problem [30, S. 23], der *Allgemeinen Theorie der Cometenbahnen...* [7], 1815, [30, S. 338–349], den *Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie* [8], 1845, [27, S. 301–340] und anderen Arbeiten.

In keinem der zitierten Werke gibt Gauß einen Konvergenzbeweis; er gibt lediglich die Vorschriften in der Form (4) formelmäßig an und beschränkt sich in der Regel auf Aussagen wie:

> Die Formeln der zweidimensionalen Regula falsi können ... *incognitarum valores ... omni quae desideratur praecisione derivari ...* [19]

oder beim unten noch zu erläuternden Gauß-Newton-Verfahren zur nichtlinearen Ausgleichung:

> Sollten nach einem Iterationsschritt die auszugleichenden Fehler noch so groß sein, daß ihre Quadrate und Produkte nicht zu vernachlässigen sind, so ...... *eiusdem operationis repetitio ... valoribus correctis ... remedium promptum afferet.* [20]

Dennoch ist zu vermuten, dass Gauß sehr genaue Vorstellungen darüber hatte, wann Iterationsverfahren konvergieren. Beispielsweise erkennt Gauß in der *Theorie motus...* [37] 1809 die quadratische Konvergenz [60, S. 110] des Newton-Verfahrens [60, S. 113–117] zur Auflösung der Gleichung $E = M + e \sin E$ nach E und dass die Konvergenz umso besser ist, je kleiner e ist:

> Verglichen mit dem Fehler des Anfangswertes bezieht sich der Fehler *valoris novi ad ordinem secundum..., et per Operationem iteratam ad ordinem quartum, octavum etc. deprimi* [21]

Denn bei quadratischer Konvergenz verdoppelt sich die Zahl der korrekten Dezimalstellen bei jedem Schritt.

Schreibt man das System (4) in der neuen Form

$$x^{\text{neu}} = F\big(x^{\text{alt}}\big) \tag{5}$$

[19] [37], 1809, [30, S. 162–163], ... die Werte der Unbekannten ... mit jeder gewünschten Genauigkeit ableiten ...

[20] [37], 1809, [30, S. 248], ... so liefert die Wiederholung derselben Operation mit korrigierten Werten prompte Abhilfe.

[21] [37], 1809, [30, S. 24], ... des neuen Fehlers auf die zweite Ordnung..., und (kann) durch die wiederholte Operation auf die vierte, achte Ordnung etc. herabgedrückt (werden)

mit einer stetig differenzierbaren Abbildung $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und nimmt man die Existenz einer Lösung $\tilde{x}$ der Gleichung

$$\tilde{x} = F(\tilde{x}) \tag{6}$$

an, so erhält man für die Fehler die Beziehung

$$x^{\text{neu}} - \tilde{x} = F\big(x^{\text{alt}}\big) - F(\tilde{x}) = \operatorname{grad} F|_\xi \big(x^{\text{alt}} - \tilde{x}\big) \tag{7}$$

wobei ξ eine Zwischenstelle bezeichnet. Wegen der Ähnlichkeit dieser Beziehung und der Fehlerfortpflanzungsgleichung (1) ist zu vermuten, dass Gauß wusste, dass man F so zu wählen hat, dass $\operatorname{grad} F$ in der Nähe der Lösung möglichst klein ausfällt, denn nach (7) erhält man dadurch eine möglichst große Verringerung des Fehlers bei jedem Iterationsschritt.

Auch diese Klasse numerischer Methoden hat bis heute große Bedeutung. Aus der Methode (5) zur Lösung der Fixpunktgleichung (6) hat sich eine breite Theorie entwickelt, die moderne Methoden der Topologie und der Funktionalanalysis voraussetzt.

Für den Spezialfall $n = 2$ des nichtlinearen Systems (3) hat Gauß in der *Theoria motus...* [37, Nr. 120], 1809, [30, S. 160 f.] vgl. auch [56, S. 294–295] die Regula falsi auf zwei Dimensionen verallgemeinert. Auch dieses Verfahren ist mit vielen neueren Varianten noch immer aktuell [60, S. 109]. Eine genauere Darstellung der nichtlinearen Iterationsmethoden bei Gauß findet man bei H. Heinrich [43], 1977.

Ein weiteres Iterationsverfahren von Gauß berechnet die Wurzeln einer algebraischen Gleichung

$$x^{n+m} + ax^n + b = 0 \tag{8}$$

im Rahmen der *Beiträge zur Theorie der algebraischen Gleichungen* [23], 1850, [26, S. 71–103]. Paradoxerweise ist dieses Verfahren so gut, dass es in Vergessenheit geraten mußte. Es arbeitet nämlich bei manueller Rechnung sehr effektiv, wenn gewisse Hilfstafeln verschiedener Genauigkeit vorliegen, und durch diese ausgezeichnete Anpassung der Methode an die gegebenen Rechenhilfsmittel ist es zwangsläufig, dass bei der technologischen Revolution des wissenschaftlichen Rechnens dieses Verfahren nicht mehr aktuell ist.

An dieser Stelle sollte darauf hingewiesen werden, dass infolge der heutigen Rechenhilfsmittel eine von Gauß und seinen Zeitgenossen häufig verwendete Iterationstechnik kaum noch praktikabel ist, nämlich die allmähliche Steigerung der Rechengenauigkeit durch sukzessive Erhöhung der Stellenzahl, wobei durch Bildung geeigneter Differenzen nur noch jeweils die letzten Stellen korrigiert werden.

Ein letztes wichtiges auf Gauß zurückgehendes Iterationsverfahren ist das heute als *Gauß-Newton-Verfahren* bezeichnete. Es dient zur nichtlinearen Ausgleichung einer Reihe von Meßwerten $y_1, \dots, y_m$, $m \geq n$, die im Idealfall als Werte gewisser Funktionen $\Phi_1, \dots, \Phi_m$ vom $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}$ aufzufassen sind. Man sucht nun Parameter $x_1 \dots, x_n$, so dass nach der Methode der kleinsten Quadrate

$$\sum_{i=1}^{m} \big(y_i - \Phi_i(x_1, \dots, x_n)\big)^2$$

minimal wird. Das Problem der Nichtlinearität der Funktionen $\Phi_1, \dots, \Phi_m$ wird, wie Gauß in der *Theoria motus ...* [37], 1809, [30, S. 247] vorschlägt, durch Linearisierung mit Hilfe der Taylor-Formel umgangen:

$$\sum_{i=1}^{m} \big(y_i - \Phi_i(\tilde{x}) - \operatorname{grad} \Phi_i|_{\tilde{x}}(x - \tilde{x})\big) = \text{Min.},$$

indem für eine feste Näherung $\tilde{x}$ die obige Funktion über x minimiert wird. Dieses lineare Ausgleichsproblem ist natürlich mit der von Gauß entwickelten Methode der kleinsten Quadrate über die Normalgleichungen auflösbar.

Das Verfahren ist mit gewissen Modifikationen nach wie vor aktuell; die ersten Verbesserungen wurden von Levenberg [51, 1944] und Marquardt [52, 1963] angebracht und ermöglichen einen Konvergenzbeweis, den Gauß mit den oben schon erwähnten Worten außer acht ließ.

6 Interpolation mit Polynomen und zugehörige Integrationsformeln

Ein Schwerpunkt der Gauß'schen Beiträge zur numerischen Mathematik liegt in der Interpolation und der Integration. Am 25.11.1796 steht in seinem Tagebuch [36] die Eintragung

> *Formula interpolationis elegans* [22]

womit wahrscheinlich die Interpolationsformel von Lagrange gemeint ist. Im November 1805 findet sich dann die Eintragung

> *Theoriam interpolationis ulterior excoluimus* [23]

Vermutlich hat Gauß zu diesem Zeitpunkt die grundlegenden Resultate seiner Arbeit *Theoria interpolationis methodo nova tractata* [24] [10], 1805, [26, S. 265–327] gefunden. Diese Arbeit enthält zusammen mit der ebenfalls nachgelassenen *Exposition d'une nouvelle methode de calculer les perturbations planetaires ...* [25] [16], 1815–16, [30, S. 439–472] die Grundlagen für die Gauß bekannten klassischen Interpolations- und Integrationsformeln. In der *Theoria interpolationis methodo nova tractata* werden die Interpolationsformeln von Lagrange ([47, S. 284], dort Newton zugeschrieben, zitiert nach [67, S. 63], [60, S. 129]) und Newton [54, 1687, Buch III, Lemma V], zitiert nach [67, S. 63], [60, S. 138] in Form unendlicher Reihen neu entwickelt, und zwar getrennt für Polynome und für den in der Astronomie wichtigeren Fall der Interpolation 2π-periodischer Funktionen durch $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots$. Auch hier ist für Gauß der Fehler der Interpolationsformeln ein zentraler Gesichtspunkt. Er leitet z. B. für den bei der Interpolation der Werte einer Funktion $f(x)$ durch ein Polynom $p(x)$ von Grad $\leq n$ in Punkten $x_0, x_1, \ldots, x_n$ entstehenden Fehler die übliche Formel

$$f(x) - p(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \dot{\Delta}^{n+1}(x_0, x_1, \ldots, x_n, x) f$$

ab [10], 1805, [26, S. 277], wobei Δ^{n+1} den (n+1)-ten *Differenzenquotienten* [60, S. 135] bezeichnet. Ist der Interpolationspunkt x bekannt, so fragt Gauß nach der optimalen Plazierung der Stützstellen $x_0, x_1, \ldots, x_n$ und erhält bei äquidistanter Verteilung der Stützstellen erwartungsgemäß, dass der Punkt x zentral bezüglich der Stützstellen liegen sollte, z. B. bei ungerader Stützstellenzahl

> *termini ii sunt eligendi, quorum medius quaesito iaceat quam proximus* [26]

[22] [32, S. 508], Elegante Interpolationsformel
[23] [32, S. 564], Theorie der Interpolation weiter ausgebaut
[24] Theorie der Interpolation, mit einer neuen Methode behandelt
[25] Darstellung einer neuen Methode, die planetarischen Störungen zu berechnen
[26] [26, S. 277], "... sind jene Terme auszuwählen, deren mittlerer dem gesuchten am nächsten liegt"

Aus dieser Auswahlvorschrift heraus ergeben sich die nach Gauß benannten, aber in seinen Werken nicht explizit auftretenden Interpolationsformeln [4]. Durch Mittelung entsprechend gebildeter Formeln erhält man neue Formeln, die nach Stirling und Bessel benannt sind. Diese Formeln müssen auch Gauß bekannt gewesen sein, denn die Formel von Bessel findet sich als *Interpolationsmethode für halbe Intervalle des Arguments* [18], 1822, [33, S. 29–31] und in einem Brief an Bessel vom 7.10.1805 [38, S. 19-21], während die durch Integration der Stirling'schen und der Bessel'schen Formel entstehenden Integrationsformeln ohne näheren Beweis in der *Exposition d'une nouvelle methode de calculer las perturbations planetaires ...* ([16], 1816, [30, S. 462], vgl. auch die Bemerkung von Schering [26, S. 330]) auftreten, wo Gauß erzeugende Funktionen für die Koeffizienten angibt. Weitere Einzelheiten zur Chronologie der frühen Interpolationsformeln findet man in [53].

Einen guten Überblick über die Kenntnisse von Gauß auf dem Gebiet der Polynominterpolation und der numerischen Integration erhält man durch die Arbeiten *über Interpolation* [4] und *über mechanische Quadratur* [5] von J. F. Encke, die noch zu Lebzeiten von Gauß erschienen:

> *Der folgende Aufsatz ist aus den Vorlesungen entlehnt, die ich im Jahre 1812 bei dem Herrn Hofrath Gauß zu hören das Glück hatte. In dem ganzen Gange der Entwickelung bin ich, soviel die Erinnerung gestattete, dem Vortrage meines hochgeehrten Lehrers gefolgt, da er die größte Gründlichkeit mit der größten Einfachheit und Eleganz verbindet.* [4] *Bei meinem Aufenthalt in Göttingen im Jahre 1812 übertrug mir Herr Hofrath Gauß die Berechnung der speciellen Störungen der Pallas, und leitete mir zu diesem Behufe seine Methoden und Formeln ab, deren er seit längerer Zeit sich bedient hatte. Er hatte damals die Absicht selbst etwas über diesen Gegenstand bekannt zu machen und behielt sich diese Erläuterung vor. Jetzt wo leider die Aussicht auf ein eigenes Werk von Gauß, wegen seiner vielfachen andern wichtigen Untersuchungen, so gut wie verschwunden scheint, hat er es mir gestattet, das was ich aus seinen Vorträgen für die nachherige häufige Anwendung auf Cometen und kleine Planeten benutzt habe hier zu publiciren; wobei ich nur noch hinzuzufügen mir erlaube, daß der Weg zum Beweise der Formeln nicht genau der ist, welchen Gauß bei mir genommen, weil es mir nicht rathsam schien allzuviele verwandte Betrachtungen einzumischen. Diese Bemerkung soll, wie sich von selbst versteht, nur bevorworten, daß wenn vielleicht in der Beweisführung Einiges nicht bestimmt genug erscheinen möchte, der Fehler ganz allein mir zur Last fällt.* [5]

7 Diskrete Fourier-Analyse

Da sich für Gauß wegen der Anwendungen in der Astronomie das Problem der Interpolation periodischer Funktionen stellte, bildet die oben schon angedeutete trigonometrische Interpolation einen Schwerpunkt der Gauß'schen Arbeit zur Interpolationstheorie. Dabei erscheint unverständlich, dass Gauß die Interpolation mit Funktionen $\cos mx, \sin mx$ für $m = 0, 1, \ldots, n$ auf dem Intervall $[0, 2\pi)$ nicht über die Formel

$$\cos mx + i \sin mx = (e^{ix})^m \tag{9}$$

auf die Interpolation mit komplexen Polynomen vom Grade $\leq n$ auf dem Einheitskreisrand reduziert. Vielleicht sind die Gründe dieselben, aus denen Gauß in seinen *Disquisitiones arithmeticae* [9] 1801, [24, S. 1–474] die explizite Rechnung im Körper $\mathbb{Q}(\sqrt{-D})$ vermeidet

[65]. Eventuell war für Gauß auch die dadurch erzwungene umständliche Formulierung der Arbeit ein Grund, von einer Publikation abzusehen. Darum wird im folgenden von der durch (9) bedingten Vereinfachung Gebrauch gemacht.

In der Arbeit *Theoria interpolationis methodo nova tractata* [10] von 1805, [26, S. 265–327] behandelt Gauß die trigonometrische Interpolation in der Form der diskreten Fourier-Analyse, die sich in modernisierter Formulierung mit der folgenden Interpolationsaufgabe deckt:

Man bestimme zu N gegebenen komplexen Zahlen $y_0, y_1, \dots, y_{N-1}$ ein Polynom

$$P(z) = \sum_{j=0}^{N-1} c_j z^j \tag{10}$$

vom Grade $\leq N-1$ mit komplexen Koeffizienten c_j, das an den N-ten Einheitswurzeln

$$1,\ \omega_N = e^{\frac{2\pi i}{N}},\ \omega_N^2, \dots, \omega_N^{N-1}$$

die Werte $y_0, y_1, \dots, y_{N-1}$ interpoliert:

$$P\left(\omega_N^j\right) = y_j, \quad (0 \leq j \leq N-1).$$

Durch Einführung einer weiteren unimodularen komplexen Zahl $\hat{\omega}$ werden beliebige äquidistante Verteilungen von N Punkten auf dem Einheitskreisrand zugelassen und es kann das allgemeinere Interpolationsproblem

$$P\left(\hat{\omega} \cdot \omega_N^j\right) = y_j, \quad (0 \leq j \leq N-1) \tag{11}$$

behandelt werden. Wie Gauß durch Einsetzung trigonometrischer Identitäten in die Lagrangesche Interpolationsformel [26, S. 291–292] beweist, ist die Lösung (10) von (11) darstellbar durch eine Linearkombination der Daten $y_0, \dots, y_{N-1}$ mit Sinus- und Cosinus-Termen als Koeffizienten, die hier die Form

$$c_j = \frac{1}{N} \hat{\omega}^{-j} \sum_{k=0}^{N-1} y_k \omega_n^{-jk}, \quad (0 \leq j \leq N-1), \tag{12}$$

erhält, was in heutiger Terminologie durch die aus

$$0 = \omega_N^{Nk} - 1 = \left(\omega_N^k - 1\right) \sum_{j=0}^{N-1} \omega_N^{jk}, \quad (k \geq 0)$$

folgende Beziehung

$$\sum_{j=0}^{N-1} \omega_N^{jk} = \begin{cases} 0, & k \neq 0 \mod N \\ N, & \text{sonst} \end{cases}$$

ganz einfach zu verifizieren ist (vgl. auch den Beweisschritt von Gauß aus [26, S. 297]).

Nach der Ableitung von Formeln der Gestalt (12) als Lösung der Interpolationsaufgabe (11) versucht Gauß nun, den Aufwand zur numerischen Auswertung von (12) für den Fall $N = n \cdot m$ zu senken, indem er die Fourier-Analysen (12) der Länge N zurückführt auf Fourier-Analysen (12) der Längen n und m [26, S. 303 f.].

Dies ist der Grundgedanke der diskreten schnellen (weil mit weniger Rechenaufwand verbundenen) Fouriertransformation (DFT bzw. FFT), die um 1805 von Gauß erfunden aber nicht publiziert worden ist: Die Publikation erfolgte erst 1866 nach Gauß' Tod im dritten Band der Gauß'schen Werke [26], jedoch lange vor deren erneuter Erfindung bzw. Entdeckung durch Cooley und Tukey [1]. Eine ausführliche Darlegung der Geschichte der schnellen Fouriertransformation (die, hätte Gauß sie rechtzeitig publiziert, heute schnelle Gausstransformation heißen würde) sowie deren Wiederentdeckung und deren Zurückführung auf Gauß findet man bei [41].

Der Gauß'sche Ansatz sieht auf den ersten Blick anders aus, da nicht gewisse Zwischenergebnisse mit gewissen Einheitswurzeln multipliziert werden, sondern von vornherein für $N = n \cdot m$ die m Teilprobleme der Interpolation von y_{j+km} in

$$\omega_N^j \cdot \omega_n^k, \quad (0 \le k \le n-1)$$

für $j = 0, 1, \ldots, m-1$ durch m Polynome

$$P^{(j)}(z) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k^{(j)} z^k, \quad 0 \le j \le m-1 \tag{13}$$

vom Grad $n-1$ betrachtet werden (es werden hier je n äquidistante Datenpunkte nacheinander mit ω_N^j zyklisch verschoben und gemäß (12) interpoliert). Gauß erkennt an dieser Stelle, dass die Koeffizienten der zu berechnenden Interpolierenden (hier die c_j, $0 \le j \le N-1$) als Werte von m trigonometrischen Polynomen vom Grad $\le n-1$ darstellbar sind, die wiederum die Koeffizienten $c_k^{(j)}$ haben, so dass die c_j über die $c_k^{(j)}$ als Zwischenresultat berechenbar werden. Dies ist in heutiger Schreibweise leicht nachzuprüfen, denn aus (12) erhält man (13) durch

$$c_k^{(j)} = \frac{1}{n}\omega_N^{-jk} \sum_{k=0}^{n-1} y_{j+lm}\omega_n^{-kl}, \quad (0 \le k \le n-1, \quad 0 \le j \le m-1) \tag{14}$$

und wenn man diese Werte einer weiteren Fourier-Analyse (12) der Länge m unterwirft, folgt schließlich die Berechnung der gesuchten Koeffizienten von (11) als Polynomwerte aus

$$\begin{aligned} \frac{1}{m}\sum_{j=0}^{m-1} c_k^{(j)}\omega_m^{-jr} &= \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{l=0}^{n-1} y_{j+lm} \cdot \underbrace{\omega_n^{-kl}\omega_N^{-jk}\omega_N^{-jr} \cdot 1}_{\omega_N^{-klm}\omega_N^{-jk}\omega_N^{-jrn}\omega_N^{-rnlm}} \\ &= \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{l=0}^{n-1} y_{j+lm} \cdot \omega_N^{-(k+rn)(j+lm)} = \frac{1}{N}\sum_{s=0}^{N-1} y_s \omega_N^{-(k+rn)s}, \qquad s = j+lm \\ &= c_{k+rn}, \qquad 0 \le k \le n-1, \quad 0 \le r \le m-1. \end{aligned} \tag{15}$$

Wenn man diese Gleichungskette rückwärts verfolgt, erkennt man dieselben Formeln, die bei entsprechender Schreibweise der schnellen Fouriertransformation nach Cooley und Tukey auftreten. Schreibt man nämlich (14) in der Form

$$c_k^{(j)} \cdot \omega_N^{jk} = \frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n-1} y_{j+lm}\omega_n^{-kl}, \quad 0 \le k \le n-1,$$

so besteht (bis auf den Faktor $\frac{1}{n}$) die rechte Seite aus dem Zwischenergebnis der Rechnung nach Cooley-Tukey, was nach Multiplikation mit ω^{-jk} von Cooley und Tukey gemäß (15) weiterverarbeitet wird. Es ist somit festzustellen, dass sich die Entwicklung der schnellen Fouriertransformation schon bei Gauß findet; er hat in der oben zitierten Arbeit [10], 1805, [26, S. 265–327] ein numerisches Beispiel für $N = 12 = 3 \cdot 4$ angegeben und zusammenfassend folgendes bemerkt:

> *Pro eo itaque casu, ubi multitudo valorum propositorum ..., periodam integram formantium, numerus compositus est [$N = n \cdot m$,], per partitionem illius periodi in ... [n] periodos ..., [m] terminorum ... cunctis valoribus datis satisfacientem eruere ... didicimus ...: illam vero methodum calculi mechanici taedium magis minuere, praxis tentantem docebit.* [27]

Letzterem ist aus heutiger Sicht nichts hinzuzufügen. Es ist sehr bedauerlich, dass die schnelle Fouriertransformation erst so spät wiederentdeckt wurde. Dies mag einerseits daran liegen, dass die Gauß'sche Arbeit erst im Jahre 1866 mit dem Nachlaß publiziert wurde, keine Übersetzung aus dem Lateinischen erfuhr und ohnehin wegen der Formulierung mit reellen trigonometrischen Größen nicht leicht zugänglich ist (vgl. den unten zitierten Brief von Olbers); andererseits zeigt die schnelle Fouriertransformation hauptsächlich für $N = 2^p$ ihre besonderen Vorteile, was aber wegen der Bevorzugung von $N = 12$, 24 oder 36 infolge der damals vorherrschenden Rechnung im Gradmaß sich nicht auswirken konnte.

Es ist schwierig, aus heutiger Sicht herauszufinden, warum Gauß seine *Theorie interpolationis* ... [10], 1805, [26, S. 265–327] nicht publizierte. Einerseits konnte die aus den oben schon erläuterten Gründen recht schwerfällige Formulierung und die (nur zu vermutende) Einsicht von Gauß, dass mit (9) eine viel elegantere Fassung möglich wäre, dafür verantwortlich sein. Andererseits hat die Arbeit bei Olbers und Schumacher, die handschriftliche Kopien von Gauß erhielten, durchaus positive Resonanz gehabt und Gauß hat eine Zeitlang selbst an eine Publikation gedacht. Beispielsweise schreibt Gauß an Olbers am 3. Januar 1806 [35, S. 281–282] auf dessen Frage nach seiner Methode zur Berechnung der Pallasstörungen:

> *Einige zufällige Umstände waren vor einiger Zeit Ursache, daß ich verschiedene Untersuchungen über die Interpolationstheorie auszuarbeiten anfing; ... die letzte grössere Hälfte*[28] *ist es, von der ich bei meiner Methode, die Perturbationen zu berechnen, einen sehr nothwendigen und vortheilhaften Gebrauch mache, daher ich wohl Gelegenheit wünschte, jene Abhandlung vorher irgendwo zum Druck zu befördern. Ich dachte sie anfangs nach Göttingen zu schicken, doch würde sie wohl für die Comment. zu voluminös, vielleicht auch für eine akademische Schrift zu elementarisch sein, obwohl vieles, was darin vorkommt, meines Wissens neu ist ...*

Er legt Olbers die Abhandlung zur Durchsicht vor und will der *Societät* zumindest eine Abschrift schicken. Am 21./29. Januar 1806 [55, S. 286] teilt Olbers dann Gauß seine Meinung über die Abhandlung mit:

> *Bin ich jetzt noch fähig über dergleichen zu urteilen, so ist sie des Druckes in den Gött. Commentarien vollkommen würdig, und wahrlich nicht zu elemen-*

[27] [26, S. 307], Für den Fall, wo die Anzahl der gegebenen Werte ... die eine ganze Periode bilden, eine zusammengesetzte Zahl ist [$N = n \cdot m$,] haben wir gelehrt, wie man durch Zerlegen jener Periode [$N = n \cdot m$,] in [n] Perioden von [m] Termen mit allen gegebenen Werten zufriedenstellend verfahren werden kann; die Praxis wird schließlich lehren, wie mit jener Methode der Überdruß des mechanischen Rechnens sehr verringert werden kann.

[28] der an Olbers geschickten Fassung, vermutlich wie [26, S. 265–327] mit der diskreten Fourier-Analyse

tarisch. Ich wenigstens fasse den zweiten Theil nur mit einiger Anstrengung, finde ihn aber auch weit bedeutender, als den ersten.

Darauf reagiert Gauß nicht. Zehn Jahre später schreibt Schumacher an Gauß:[29]

> *Ich habe in der Hoffnung, Sie würden dadurch Veranlassung finden, Ihre Theorie der Interpolation, die ich handschriftlich habe, bekannt zu machen, die Preisfrage unserer Akademie*[30] *für 1817 so abfassen zu lassen: ‚Theoriam intempolationis evolvere quae praesent in functionibus periodicis adhuc manca videtur.'*[31] *Wir bitten insgesammt gehorsamst uns zu beehren.*

In seiner Antwort vom 5.7.1816 geht Gauß aber mit keinen Wort auf die *Theoria interpolationis ...*, ein sondern schlägt eine Preisfrage vor, die ihm ermöglicht, die erst 1825 publizierte *Allgemeine Auflösung der Aufgabe die Theile einer gegebnen Fläche auf einer andern gegebnen Fläche so abzubilden daß die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich wird* [20], 1825, [27, S. 189–216] als Preisschrift einzureichen.

Nach Gauß sind effektive Methoden zur diskreten Fourier-Analyse erst durch eine Arbeit von C. Runge [58] 1903 publiziert worden: diese Methoden beruhen auf der einfachen Beobachtung, dass Sinus und Cosinus auf $[0, 2\pi]$ ausdrückbar sind durch Verschiebung bzw. Spiegelung des Sinus auf $[0, \frac{\pi}{2}]$ und sie erzielen somit etwa eine Viertelung des Rechenaufwandes. Auch diese Verfahren lassen sich in ihren wesentlichen Bestandteilen bei Gauß nachweisen; in der Arbeit *Allgemeine Störungen der Pallas durch Jupiter, Erste Rechnung, August 1811* [13], [30, S. 489–528] hat Gauß die nötigen Formeln zusammengestellt und damit Fourier-Analysen bis $N = 24$ von Hand durchgeführt.

8 Die Gauß'sche Integrationsmethode

Zum Schluß ist noch auf die Arbeit *Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi*[32] [17], 1816, [26, S. 163–196] einzugehen, in der Gauß den wichtigsten Spezialfall der nach ihm benannten und in allgemeineren Fällen immer noch hochaktuellen Integrationsmethode behandelt. Es soll hier nicht direkt der Gauß'schen Darstellungsweise gefolgt werden, da diese, wie bei Gauß häufig, den Weg zur Gewinnung der Resultate im unklaren läßt. Stattdessen soll exemplarisch versucht werden, den Gedankengang von Gauß zu rekonstruieren. Die Beschäftigung mit dieser Art der numerischen Integration kam für Gauß wohl eher zufällig, denn er schreibt an Schumacher [34, S. 109] am 13.9.1814 und an Olbers [35, S. 561–562] am 25.9.1814, dass er durch Arbeiten über *die Theorie der Refraction* auf die Problemstellung gestoßen sei.

In der Arbeit selbst untersucht Gauß, wie aus dem unten angeführten Zitat hervorgeht, bezeichnenderweise den Fehler der damals gebräuchlichsten Integrationsformeln von Newton [54] und Cotes [2]. Dabei wird (in modernisierter Schreibweise) das Integral über eine reelle Funktion f auf $[-1, +1]$ ausgedrückt durch eine Formel der Gestalt

$$\int_{-1}^{+1} f(t)\, dt = \sum_{i=0}^{n} g_i^{(n)} f(x_i^{(n)}) + R_n(f), \tag{16}$$

[29] [34, S. 128], 8.6.1816

[30] der Wissenschaften zu Kopenhagen

[31] Eine Theorie der Interpolation zu entwickeln, die zur Zeit für periodische Funktionen zu fehlen scheint

[32] *Neue Methode, die Werthe der Integrale näherungsweise zu finden*, Übersetzung von C.G.J. Jacobi aus [45]

wobei $[-1,+1]$ durch *Stützstellen*

$$-1 \leq x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \cdots < x_n^{(n)} \leq 1$$

unterteilt wird und die Gewichte $g_i^{(n)} \in \mathbb{R}$ so gewählt werden, dass bei Einsetzung von Polynomen vom Grad $\leq n$ das Restglied R_n in (16) verschwindet. Einfache Beispiele solcher Formeln (16) sind die *Trapezregel*

$$\int_{-1}^{+1} f(t)\,dt = f(-1) + f(1) + R_1(t)$$

für $n = 1$ oder die *pulcherrima*-Regel

$$\int_{-1}^{+1} f(t)\,dt = \frac{1}{4}f(-1) + \frac{3}{4}f\left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{3}{4}f\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{4}f(1) + R_3(f)$$

für $n = 3$. Für den Fall äquidistanter Stützstellenverteilungen hat Cotes 1722 in seiner *Harmonia mensurarum* [2] bis $n = 10$ die entsprechenden Gewichte ohne die zugehörige Rechnung angegeben, wozu Gauß bemerkt:

> *Bei dieser Methode liegt durchaus die Voraussetzung gleicher Abstände zwischen den Ordinaten zum Grunde. Allerdings scheint beim ersten Anblick diese Voraussetzung am einfachsten und natürlichsten zu sein und es war noch nicht in Frage gekommen, ob es nicht dem ungeachtet noch vorteilhafter sein könne, Ordinaten in ungleichen Abständen zu Grunde zu legen. Um diese Frage zu entscheiden, musste zuerst die Theorie der Quadraturcoefficienten in unbeschränkter Allgemeinheit entwickelt und der Grad der Genauigkeit des Resultates bestimmt werden.* [33]

Daher hat Gauß offensichtlich die allgemeine Formel (16) zum Ausgangspunkt seiner überlegungen gemacht und versucht, die Gewichte $g_i^{(n)}$ und das Restglied R_n durch die Stützstellen $x_i^{(n)}$ auszudrücken. Da zu Gauß' Zeiten fast ausschließlich analytische Funktionen betrachtet wurden und das Rechnen mit Potenzreihen zu den wichtigsten Werkzeugen gehörte, kann angenommen werden dass Gauß für f in (16) eine Potenzreihe substituierte und dann die einzelnen Terme in der Form

$$\int_{-1}^{+1} t^j\,dt = \sum_{i=0}^{n} g_i x_i^j + R(x^j), \quad j = 0, 1, \ldots \tag{17}$$

erhielt. Dies liefert auf der linken Seite die Zahlenfolge

$$2, 0, \frac{2}{3}, 0, \frac{2}{5}, 0, \frac{2}{7}, 0, \ldots$$

und Gauß war sicher bekannt, dass die Potenzreihe

$$2 + 0 \cdot s + \frac{2}{3}s^2 + 0 \cdot s^3 + \frac{2}{5}s^4 + \cdots = \frac{2}{s}\left(s + \frac{1}{3}s^3 + \frac{1}{5}s^5 + \ldots\right)$$

[33] [17], 1816, [26, S. 203]

die Funktion

$$\frac{1}{s}\log\frac{1-s}{1+s} =: g(s)$$

für $0 < |s| < 1$ darstellt. Somit liegt es nahe (zumal Laplace die Methode der *fonction génératrice* in seiner *Théorie analytique des probabilités* [48] schon 1812 entwickelt hatte), die Gleichungen (17) mit entsprechenden s-Potenzen zu multiplizieren und aufzusummieren mit dem Resultat

$$\sum_{j=0}^{\infty} s^j \sum_{i=0}^{n} g_i x_i^j + \sum_{j=0}^{\infty} s^j R(x^j) = g(s). \tag{18}$$

Wegen $0 < |s| < 1$ und $-1 \leq x_i \leq 1$ gilt aber

$$\sum_{j=0}^{\infty} s^j x_i^j = \frac{1}{1-sx_i} = \frac{\frac{1}{s}}{\frac{1}{s}-x_i},$$

was nach Einsetzung in (18) und Substitution $t = \frac{1}{s}$ zu

$$\log\frac{t+1}{t-1} = \sum_{i=0}^{n} g_i \frac{1}{t-x_i} + \sum_{j=0}^{\infty} R(x^j)t^{-j-1}, \quad |t| > 1$$

führt. Mit dem Polynom

$$\Omega(t) = \prod_{j=0}^{n}(t-x_j) \tag{19}$$

erhält man schließlich die bei Gauß im dortigen Zusammenhang überraschend auftretende Gleichung

$$\begin{aligned} \Omega(t)\cdot\log\frac{t+1}{t-1} &= \sum_{i=0}^{n} g_i \prod_{j\neq i}^{n}(t-x_j) + \Omega(t)\sum_{j=0}^{\infty} R_n(x^j)t^{-j-1} \\ &=: \qquad F_1(t) \qquad + \qquad F_2(t). \end{aligned} \tag{20}$$

Diese Beziehung interpretiert Gauß folgendermaßen: Sind die Stützstellen x_i und die gewichte g_i gegeben, so ist die rechte Seite von (20) eine Zerlegung der Entwicklung der bekannten, nur von den Stützstellen abhängigen Funktion auf der linken Seite in t-Potenzen mit positiven und negativen Exponenten, wobei $F_1(t)$ alle Potenzen mit nicht-negativen Exponenten und $F_2(t)$ nur solche mit negativen Exponenten enthält. Es ist somit kein Problem, bei gegebenen Stützstellen das Polynom $F_1(t)$ zu berechnen; dessen Werte an den Stellen x_k sind aber

$$\begin{aligned} F_1(x_k) &= \sum_{i=0}^{n} g_i \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}(x_k-x_j) \\ &= g_k \cdot \prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n}(x_k-x_j) \\ &= g_k\cdot\Omega'(x_k), \qquad 0\leq k\leq n, \end{aligned}$$

woraus die gewünschte explizite Formel

$$g_k = \frac{F_1(x_k)}{\Omega'(x_k)}, \qquad 0\leq k\leq n \tag{21}$$

für die Gewichte der Newton-Cotes-Formeln bei ganz allgemeinen Stützstellenvorgaben folgt. Bei der etwas nachlässigen Schreibweise von (21) ist noch zu berücksichtigen, dass F_1 und Ω vermöge (20) und (19) von allen Stützstellen x_j abhängen.

Die Zerlegung (20) liefert Gauß natürlich auch sämtliche Fehlerterme $R(x^j)$ als Entwicklungskoeffizienten der Funktion $F_2(t)/\Omega(t)$ nach t-Potenzen mit negativen Exponenten. Sind die Gewichte g_i bereits gemäß (21) so bestimmt, dass $R_n(x^j) = 0$ für $j = 0, 1, \ldots, n$ gilt, so ist der erste Fehlerterm $R_n(x^{n+1})$ gerade der Koeffizient von t^{-1} in der Entwicklung von F_2. Dieser Fehlerterm ist somit besonders einfach zu berechnen, was Gauß auch ausnutzt.

Die Beziehung (20) ist der Ausgangspunkt für Gauß' Ansatz, die Stützstellen x_j so zu plazieren, dass auch die Fehlerterme $R_n\big(x^j\big)$ für $j = n+1, \ldots, 2n+1$ verschwinden. Wäre dies nämlich möglich, so müßte gelten

$$\log\frac{t+1}{t-1} = \frac{F_1(t)}{\Omega(t)} + \frac{F_2(t)}{\Omega(t)} \tag{22}$$

$$= \frac{F_1(t)}{\Omega(t)} + R\big(x^{2n+2}\big)t^{-2n-3} + R\big(x^{2n+3}\big)t^{-2n-4} \tag{23}$$

d. h. die Funktion $\log\frac{t+1}{t-1}$ müßte dargestellt werden als Quotient zweier Polynome vom Grad n bzw. $n+1$ mit einem Rest, der eine Potenzreihe in t^{-1} mit Anfangsterm t^{-2n-3} ist. Da Gauß in seinen *Disquisitiones generales circa seriem infinitam* $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$[34] [15]. 1813, [26, S. 123–162] die Kettenbruchentwicklung

$$\log\frac{t+1}{t-1} = 2\cdot\cfrac{1}{t-\cfrac{\frac{1\cdot 1}{1\cdot 3}}{t-\cfrac{\frac{2\cdot 2}{3\cdot 5}}{t-\cfrac{\frac{3\cdot 3}{5\cdot 7}}{t-\ddots}}}}$$

hergeleitet hat, liegt es für ihn nahe, diese hier zu verwenden und (wie z. B. schon Wallis [64, 1656]) den Kettenbruch durch Näherungsbrüche mit Restglied darzustellen. Dies ist durch die allgemeinen Formeln

$$\cfrac{a_0}{t-\cfrac{a_1}{t-\cfrac{a_2}{t-\ddots}}} = \cfrac{a_0}{t-\cfrac{a_1}{t-\ddots\cfrac{a_{k-1}}{t-\cfrac{a_k}{t}}}} + R_k(t) = \frac{Z_k(t)}{N_k(t)} + R_k(t)$$

mit

$$R_k(t) = \sum_{j=k}^{\infty}\frac{\prod_{i=0}^{j} a_i}{N_j(t)N_{j+1}(t)}, \tag{24}$$

$$\begin{aligned} Z_{k+1}(t) &= t\cdot Z_k(t) - a_{k+1}Z_{k-1}(t), \qquad 0 \le k < \infty \\ N_{k+1}(t) &= t\cdot N_k(t) - a_{k+1}N_{k-1}(t), \qquad 0 \le k < \infty \end{aligned} \tag{25}$$

$$Z_{-1} = 0, \quad Z_0 = a_0, \quad N_{-1} = 1, \quad N_0 = t \tag{26}$$

[34] Allgemeine Untersuchungen der unendlichen Reihe $F(\ldots)$,

möglich und man erhält in diesem Spezialfall

$$\begin{aligned} N_{-1} = 1, \quad N_0 = t, \\ N_{k+1}(t) = t \cdot N_k(t) - \frac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+3)} N_{k-1}(t), \qquad 0 \le k < \infty \end{aligned} \tag{27}$$

was bis auf die Normierung mit der Rekursionsformel der Legendre-Polynome [49] übereinstimmt. Dadurch ist $N_k(t)$ ein Polynom von Grad $k+1$ und bei Abbruch an der Stelle $k = n$ folgt

$$\log \frac{t+1}{t-1} = \frac{Z_n(t)}{N_n(t)} + R_n(t), \tag{28}$$

wobei wegen (25) und (26) das Zählerpolynom den Grad n hat und das Restglied wie gewünscht wegen (24) eine Potenzreihe in t^{-1} mit Anfangsterm t^{-2n-3} ist. Damit ist bei Vergleich von (22) mit (28) die Lösung des Problems klar:

> Man wähle die x_j so, dass
>
> $$\Omega(t) = N_n(t)$$
>
> gilt, d. h. die x_j müssen die Wurzeln des gemäß (27) rekursiv zu berechnenden Polynoms $N_n(t)$ sein und die Gewichte bestimmt man dann ganz einfach aus (21) in der Form
>
> $$g_k = \frac{Z_n(x_k)}{N_n'(x_k)}, \tag{29}$$
>
> wobei $Z_n(t)$ aus derselben Rekursion (27) mit Anfangswerten 0 und 1 erhalten werden kann.

Gauß bleibt leider den Beweis schuldig, dass das Polynom $N_n(t)$ genau $n+1$ verschiedene Nullstellen in $[-1, +1]$ hat; er beweist lediglich über eine andere Form von (29), dass die Gewichte g_k stets positiv ausfallen müssen.

Sein eleganter Ansatz zur Lösung des gestellten Problems enthält zwar alles Notwendige zur numerischen Berechnung der Stützstellen und Gewichte (er gibt sie bis $n = 6$ an, vermutlich weil seine Methode aus [23] zur Bestimmung der Wurzeln von Polynomen der Form (8) gerade so weit reicht), er gibt aber keinen Hinweis auf die dem Problem zugrundeliegende Orthogonalität der Polynome $N_n(t)$. Dies tritt erst bei Jacobi [45] 1826, [46, VI, S. 3–11] in Erscheinung, der das Gemeinsame der Arbeiten von Gauß und Legendre auswertet. Auch Bessel hat 1816 die Parallelität erkannt:

> *Da ich Ihre Abhandlung über die genäherten Integrationen erhalten habe, so kann ich nicht länger unterlassen, Ihnen für den grossen, mir dadurch bereiteten Genuss meinen herzlichen Dank zu bringen. Also schon wieder eine Art von Zusammentreffen mit Legendre, wie ich aus den Exercices de calcul intégral sehe: Legendre scheint nur da zu sein, um Ihnen als Folie zu dienen.* [35]

Gauß hat damit die numerische Integration so weit *ins Klare gebracht und erschöpft*[36], dass auch heute die Grundausbildung in Numerischer Mathematik [60] nichts Wesentliches hinzufügt, wenn man von der allgemeineren und durchsichtigeren Präsentation über Orthogonalpolynome absieht.

Das Fazit dieser Rundreise durch die wichtigsten Teilgebiete der Numerik ist, dass Gauß der *princeps mathematicorum* auch in Bezug auf das heutige *Scientific Computing* ist.

---

[35] Brief an Gauß vom 21.4.1816, [38, S. 235–236]

[36] Gauß an Wolfgang Bolyai, 2.9.1808, [39, S. 93–94]

Literatur

[1] J.W. Cooley and J.W. Tukey. An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series. *Math. Comp.*, 19, S. 297–301, 1965.

[2] R. Cotes. *Harmonia mensurarum, sive analysis et synthesis per rationum et angulorum promotae.* Cantabrigae (= Cambridge) 1722.

[3] R. Dedekind. Gauß in seiner Vorlesung über die Methode der kleinsten Quadrate. In R. Dedekind, N. Bonwetsch, F. Leo, and A. Peter, editors, *Festschrift zur Feier des 150 jährigen Bestehens der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, Beiträge zur Gelehrtengeschichte Göttingens, S. 45–59. Weidmannsche Buchhandlung, Berlin 1901.

[4] J.F. Encke. Über Interpolation. In *Astronomisches Jahrbuch für 1830*, Band 55, S. 265–284. F. Dümmler, Berlin, 1828.

[5] J.F. Encke. Über mechanische Quadratur. In *Astronomisches Jahrbuch für 1837*, Band 62, S. 251–287. F. Dümmler, Berlin, 1835.

[6] A. Galle. *C. F. Gauß als Zahlenrechner.* Materialien für eine wissenschaftliche Biographie von Gauß. Teubner, 1918.

[7] C. F. Gauß. Allgemeine Theorie der Cometenbahnen nebst Anwendung auf den 2. Cometen des Jahres 1813. Nachlass, 1815.

[8] C. F. Gauß. Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie. Erste Abhandlung. *Abh. Kgl. Ges. Wiss. Göttingen*, II, 1845, S. 3–45.

[9] C.F. Gauß. *Disquisitiones arithmeticae.* Gerhard Fleischer, Lipsiae (Leipzig), 1801.

[10] C.F. Gauß. Theoria interpolationis methodo nova tractata. Nachlass, 1805 (publiziert in Werke Bd. 3, Göttingen 1866).

[11] C.F. Gauß. Anzeige der "Logarithmischen Supplemente..." von Leonelli. *Allgemeine Literaturzeitung, Halle - Leipzig*, 45, S. 353-358, 1808.

[12] C.F. Gauß. Disquisitio de elementis ellipticis palladis ex oppositionibus annorum 1803, 1804, 1805, 1807, 1808, 1809. *Göttingische gelehrte Anzeigen Band 6 (= Band 1/1810)*, S. 1969–1973, 1810.

[13] C.F. Gauß. Allgemeine Störungen der Pallas durch Jupiter, Erste Rechnung, begonnen August 1811. Nachlass, 1811.

[14] C.F. Gauß. Tafel zur bequemern Berechnung des Logarithmen der Summe oder Differenz zweyer Grössen, welche selbst nur durch ihre Logarithmen gegeben sind. *Monatl. Correspondenz*, Band 26, S. 498–528, 1812.

[15] C.F. Gauß. Disquisitiones circa seriem infinitam $f(\alpha, \beta, \gamma, x)$, pars prior. *Comm. Soc. Reg.*, II, 1816.

[16] C.F. Gauß. Exposition d'une nouvelle methode de calculer les perturbations planétaires avec l'application au calcul numerique des perturbations du mouvement de Pallas. Nachlass, 1816.

[17] C.F. Gauß. Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi. *Comm. Soc. Reg.*, III, 1816.

[18] C.F. Gauß. Interpolationsmethode für halbe Intervalle des Arguments. In H.C. Schumacher, editor, *Sammlung von Hülfstafeln*, 1822.

[19] C.F. Gauß. *Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae.* H. Dieterich, 1823.

[20] C.F. Gauß. Allgemeine Auflösung der Aufgabe die Theile einer gegebnen Fläche auf einer andern gegebnen Fläche so abzubilden, daß die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich wird. *Astron. Abh.*, 3, 1825.

[21] C.F. Gauß. Supplementum theoriae combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae. *Comm. Soc. Reg. Sc. Gott. Rec.*, 6, S. 57–98, 1828.

[22] C.F. Gauß. Eine in Deutschland erfundene Rechenmaschine. *Dinglers Polytechnisches Journal*, 52, S. 237, 1834.

[23] C.F. Gauß. Beiträge zur theorie der algebraischen gleichungen. *Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, 1850.

[24] C.F. Gauß. *Werke. Band I.* Georg Olms, Hildesheim, 1973. Nachdruck der Originalausgabe Göttingen 1863.

[25] C.F. Gauß. *Werke. Band II.* Georg Olms, Hildesheim, 1973. Nachdruck der Originalausgabe Göttingen 1863.

[26] C.F. Gauß. *Werke. Band III.* Georg Olms, Hildesheim, 1973. Nachdruck der Originalausgabe Göttingen 1866.

[27] C.F. Gauß. *Werke. Band IV.* Georg Olms, Hildesheim, 1973. Nachdruck der Originalausgabe Göttingen 1873.

[28] C.F. Gauß. *Werke. Band IX.* Georg Olms, Hildesheim, 1973. Nachdruck der Originalausgabe Göttingen 1903.

[29] C.F. Gauß. *Werke. Band VI.* Georg Olms, Hildesheim, 1973. Nachdruck der Originalausgabe Göttingen 1874.

[30] C.F. Gauß. *Werke. Band VII.* Georg Olms, Hildesheim, 1973. Nachdruck der Originalausgabe Göttingen 1906.

[31] C.F. Gauß. *Werke. Band VIII.* Georg Olms, Hildesheim, 1973. Nachdruck der Originalausgabe Göttingen 1900.

[32] C.F. Gauß. *Werke. Band X. Abt. I, II.* Georg Olms, Hildesheim, 1973. Nachdruck der Originalausgabe Göttingen 1917 und 1922–1933.

[33] C.F. Gauß. *Werke. Band XII.* Georg Olms, Hildesheim, 1973. Nachdruck der Originalausgabe Göttingen 1929.

[34] C.F. Gauß. *Werke. Ergänzungsreihe. Band V.* Georg Olms, Hildesheim, 1975. Briefwechsel: C. F. Gauß–H. C. Schumacher. Teil 1. [Briefwechsel C. F. Gauß–H. C. Schumacher. Teil 1], Hrsg. von C. A. F. Peters, Nachdruck der Originalausgabe 1860.

[35] C.F. Gauß. *Werke, Ergänzungsreihe. Band IV.* Georg Olms, Hildesheim, 1976. Briefwechsel C. F. Gauß–H. W. M. Olbers, II, Nachdruck der Originalauflage von 1909, herausgegeben von C. Schilling.

[36] C.F. Gauß. *Mathematisches Tagebuch, 1796–1814*, Band 256 of *Ostwalds Klassiker der Exakten Wissenschaften.* Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main, 5. Aufl., 2005. Mit einer historischen Einführung von Kurt-R. Biermann. Durchgesehen und mit Anmerkungen versehen von Hans Wußing und Olaf Neumann.

[37] C.F. Gauß. *Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium.* Cambridge Library Collection. Cambridge University Press, Cambridge, 2011. Nachdruck der Originalausgabe von 1809.

[38] C.F. Gauß, F.W. Bessel. *Briefwechsel zwischen Gauß und Bessel.* W. Engelmann, Leipzig 1880.

[39] C.F. Gauß and F. Bolyai. *Briefwechsel.* Carl Friedrich Gauß: Ergänzungsreihe. G. Olms, 1987.

[40] C.F. Gauß and C.L. Gerling. *Briefwechsel zwischen Carl Friedrich Gauss und Christian Ludwig Gerling.* Elsner, Berlin, 1927.

[41] M.T. Heideman, D.H. Johnson, C.S. Burrus. *Gauss and the History of the Fast Fourier Transform.* IEEE ASSP Magazine, October 1984, S. 14–21.

[42] H. Heinrich. *Auf Gauß' Spuren in der numerischen Mathematik.* Informationen / Technische Universität Dresden. 1977. Festvortrag während der Festveranstaltungen der Bezirkssektion Dresden der Mathematischen Gesellschaften der DDR und der Sektion Mathematik der Technischen Universität Dresden anlässlich des 200. Geburtstages von C.F. Gauß, gehalten am 11. März 1977.

[43] H. Heinrich. Über Gauß' Beiträge zur numerischen Mathematik. In: *Festakt und Tagung aus Anlaß des 200. Geburtstages von Carl Friedrich Gauß (Berlin, 1977)*, Band 3 of *Abh. Akad. Wiss. DDR, Abt. Math. Naturwiss. Tech., 1978*, S. 109–122. Akademie-Verlag, Berlin, 1978.

[44] H. Heinrich. Über Gauss' Beiträge zur numerischen Mathematik. In: *Numerical methods (Third Colloq., Keszthely, 1977)*, Vol. 22 of *Colloq. Math. Soc. János Bolyai*, pages 335–367. North-Holland, Amsterdam, 1980.

[45] C.G.J. Jacobi. Über Gauß' neue Methode, die Werthe der Integrale näherungsweise zu finden. *Crelle's Journal*, S. 301–308, 1826.

[46] C.G.J. Jacobi. *Gesammelte Werke. Bände I–VIII.* Herausgegeben auf Veranlassung der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften. Zweite Ausgabe. Chelsea Publishing Co., New York, 1969.

[47] J.L. Lagrange. Leçons élémentaires sur les mathématiques données à l'École normale en 1795. In *Oeuvres complètes, tome 7*, S. 183–288. Journal de l'École polytechnique, VIIe et VIIIe cahiers, t. II, 1812, 1812.

[48] P.-S. Laplace. *Théorie analytique des probabilités. Vol. I.* Éditions Jacques Gabay, Paris, 1995. Introduction: Essai philosophique sur les probabilités. Livre I: Du calcul des fonctions génératrices. [Book I: On the calculus of generating functions], Nachdruck der Originalausgabe von 1819 4th ed. (Introduction) und der Ausgabe von 1820 3rd ed. (Book I).

[49] A.M. Legendre. *Exercices de calcul integral sur divers ordres de transcendantes et sur les quadratures.* Paris: Courcier, 1816.

[50] Z. Leonelli. *Leonellis logarithmische Supplemente.* Walther' sche Hofbuchhandlung Dresden, 1806.

[51] K. Levenberg. A method for the solution of certain problems in least squares. *Quart. Appl. Math.*, 2, S. 164–168, 1944.

[52] D. W. Marquardt. An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters. *J. Soc. Indust. Appl. Math.*, 11, S. 431–441, 1963.

[53] E. Meijering. A chronology of interpolation: From ancient astronomy to modern signal and image processing. *Proc. IEEE*, 90, S. 319–342, 2002.

[54] I. S. Newton. *Philosophiae naturalis principia mathematica.* William Dawson & Sons, Ltd., London, 1687.

[55] H.W.M. Olbers. Briefwechsel zwischen Olbers und Gauß. In *Wilhelm Olbers, sein Leben und seine Werke*, Zweiter Band. Springer, Berlin 1900.

[56] A. M. Ostrowski. *Solution of equations in Euclidean and Banach spaces.* Academic Press, New York-London, 1973. Third edition of ıt Solution of equations and systems of equations, Pure and Applied Mathematics, Vol. 9.

[57] K. Reich. Logarithmentafeln, die wichtigsten Rechenhilfsmittel für mehr als 350 Jahre. In Biegel,G., Oestmann,G., Reich,K. (Hrsg.), *Neue Welten. Wilhelm Olbers und die Naturwissenschaften um 1800*, = Band 1 der *Braunschweiger Beiträge zur Wissenschaftsgeschichte*, S. 162–175, 2001.

[58] C. Runge. Über die Zerlegung empirisch gegebener periodischer Funktionen in Sinuswellen. *Z. Math. Phys. B*, 48, S. 443–456, 1903.

[59] R. Schaback. Die Beiträge von Carl Friedrich Gauß zur numerischen Mathematik. NAM–Bericht Nr. 18, Institut für Numerische und Angewandte Mathematik, Universität Göttingen, 1977.

[60] R. Schaback and H. Wendland. *Numerische Mathematik.* Springer-Lehrbuch. Springer Verlag, 2004. 5. Auflage.

[61] L. Seidel. Über ein Verfahren die Gleichungen, auf welche die Methode der kleinsten Quadrate führt, sowie lineäre Gleichungen überhaupt durch successive Annäherung aufzulösen. *Abhandlungen der Bayerischen Akademie*, 11, Dritte Abteilung, S. 81–108, 1873.

[62] V. Strassen. Gaussian elimination is not optimal. *Numer. Math.*, 13, S. 354–356, 1969.

[63] A. Vlacq, G. Vega. *Thesaurus Logarithmorum completus.* Weidmannsche Buchhandlung Leipzig, 1794.

[64] J. Wallis. *Arithmetica infinitorum.* 1656 (engl. Neuausgabe: Springer, New York 2004).

[65] A. Weil. Wie kam Gauß zum Kompositionstheorem der quadratischen Formen? Vortrag am 10.6.1977 in der öffentlichen Festsitzung der Akademie der Wissenschaften in Göttingen und der Georg-August-Universität anlässlich des 200. Geburtstages von Carl Friedrich Gauß, 1977 [nicht im Druck erschienen]

[66] J. H. Wilkinson. Error analysis of direct methods of matrix inversion. *J. Assoc. Comput. Mach.*, 8, S. 281–330, 1961.

[67] F.A. Willers. *Methoden der praktischen Analysis.* Walter de Gruyter, Berlin-New York, 1971. Vierte, verbesserte Auflage bearbeitet von Jürgen Tippe.

[68] V.V. Williams. Multiplying matrices faster than Coppersmith–Winograd. In *Proceedings of the 44th symposium on Theory of Computing*, STOC '12, S. 887–898, New York, NY, USA, 2012. ACM.

Die nachfolgende Abbildung zeigt den Programmcode eines in FORTRAN geschriebenen Programms aus dem Jahre 1973, woraus ersichtlich ist, wie kurz und effektiv der Gauß-Cooley-Tukey'sche Algorithmus schon im Jahre 1967 von Norman Brenner/MIT programmiert werden konnte (Quelle: Archiv A. Wittmann).

```
C*********************************************************************
C Cooley-Tukey fast fourier transform(k) = sum(y(j)*exp(isg*2*pi*     *
C sqrt(-1)*(j-1)*(k-1)/nn)), summed over j,k from 1 to nn. 'y' is a   *
C complex array (rea and aimag adjacent in storage) whose length is   *
C nn = 2**k, k.ge.0 (if necessary, append zeroes to the y's).         *
C If a minus-one transform is followed by a plus-one one (or vice     *
C versa), the original y reappear, multiplied by nn. Transform values *
C are returned in 'y' replacing the input. The execution time is pro- *
C portional to nn*log2(nn), rather than the naive nn**2. Accuracy is  *
C also greatly improved, the rms relative error being bounded by      *
C 6*sqrt(2)*log2(nn)*2**(-b), where b = no. of bits in the floating   *
C point fraction.                                                     *
C ------------------------------------------------------------------- *
C Written by Norman Brenner of M.I.T. Lincoln Laboratory, July 1967.  *
C ------------------------------------------------------------------- *
C From the MEM package (1972), courtesy John Leibacher/NSO (1973).    *
C Slightly modified by Axel Wittmann/USG (1973/1994/2003).            *
C*********************************************************************
      subroutine four1(y,nn)
      implicit doubleprecision(a-h,o-z)
C isg is either +1 (plus-one transform) or -1 (minus-one transform):
      parameter (isg=1)
      dimension y(1)
      data pi/3.14159265358979d0/
      n=2*nn
      j=1
      do 5 i=1,n,2
      if(i.ge.j) goto 2
      tr=y(j)
      ti=y(j+1)
      y(j)=y(i)
      y(j+1)=y(i+1)
      y(i)=tr
      y(i+1)=ti
    2 m=n/2
    3 if(j.le.m) goto 5
      j=j-m
      m=m/2
      if(m.ge.2) goto 3
    5 j=j+m
      mmax=2
    6 if(mmax.ge.n) return
      istep=2*mmax
      wr=pi/dfloat(isg*mmax)
      sinth=dsin(wr)
      wstpr=-2.d0*sinth**2
      wstpi=dsin(2.d0*wr)
      wr=1.d0
      wi=0.d0
      do 9 m=1,mmax,2
      do 8 i=m,n,istep
      j=i+mmax
      tr=wr*y(j)-wi*y(j+1)
      ti=wr*y(j+1)+wi*y(j)
      y(j)=y(i)-tr
      y(j+1)=y(i+1)-ti
      y(i)=y(i)+tr
    8 y(i+1)=y(i+1)+ti
      tr=wr
      wr=wr*wstpr-wi*wstpi+wr
    9 wi=wi*wstpr+tr*wstpi+wi
      mmax=istep
      goto 6
      end
```


Anschrift des Verfassers:

Prof. Dr. Robert Schaback
Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
Georg-August-Universität Göttingen
Lotzestraße 16–18
D-37083 Göttingen
e-mail: schaback@math.uni-goettingen.de