

Kapitel 1

Einführung

In dieser Vorlesung sollen Probleme der „realen Welt“ geschildert und diesen ein mathematisches Modell zugeordnet werden (mathematische Modellbildung). Anschließend wird dieses analysiert, z. B. Existenz- und Eindeutigkeitsfragen geklärt. Diesen Teil kann man der angewandten Mathematik zuordnen. Dann wird ein Algorithmus motiviert und untersucht (z. B. auf Konvergenz oder Konvergenzgeschwindigkeit), welcher bei konkreten Daten wenigstens eine Näherungslösung liefert. Dieser Teil gehört zur numerischen Mathematik. Schließlich werden die Rechnungen nicht per Hand durchgeführt, sondern der Algorithmus sollte auf einem Computer (in einer geeigneten Sprache) implementiert werden. Dann ist man schließlich bei der Informatik gelandet.

Am besten verdeutlichen wir die Vorgehensweise an Beispielen.

Beispiel: Bauer Lindemann hat eine kreisrunde Wiese mit Radius R . Er kauft sich eine Ziege und will diese so am Rand der Wiese anpflocken, dass die Ziege genau die Hälfte der Wiese abgrasen kann. Wie lang muss das Seil sein?

In Abbildung 1.1 verdeutlichen wir uns die Situation. Die Wiese sei der Kreis mit dem Mittelpunkt M und dem Radius R . Die Ziege ist im Punkt B angepflockt, ihr Seil habe die Länge r . Die beiden Kreise mögen sich in C und D schneiden. In H sei das Lot von C auf die Seite MH , sei $h := \overline{CH}$, ferner $qR := \overline{HB}$ und daher $(1 - q)R = \overline{MH}$. Schließlich sei $\beta := \angle(CBM)$ und $\delta := \angle(BMC)$ (jeweils im Bogenmaß gemessen).

Zu berechnen ist der Flächeninhalt F des Durchschnitts der beiden Kreise. Dieser setzt sich zusammen aus dem Flächeninhalt des Kreissektors BCD (in der Abbildung gestrichelt gezeichnet) plus der Summe der Flächeninhalte der beiden Kreisabschnitte BC und BD im Kreis um M mit dem Radius R . Die Summe der beiden letzteren ist aber der Flächeninhalt des Kreissektors MCD minus der Summe der Flächeninhalte der beiden Dreiecke $\triangle MCB$ und $\triangle MDB$. Daher ist

$$F = \beta r^2 + \delta R^2 - hR.$$

Der Satz von Pythagoras, angewandt auf die beiden Dreiecke $\triangle MHC$ und $\triangle MCB$, liefert die beiden Beziehungen

$$h^2 + (1 - q)^2 R^2 = R^2, \quad h^2 + q^2 R^2 = r^2.$$

Hieraus erhält man

$$q = \frac{1}{2} \left(\frac{r}{R} \right)^2, \quad h = r \left[1 - \frac{1}{4} \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]^{1/2}.$$

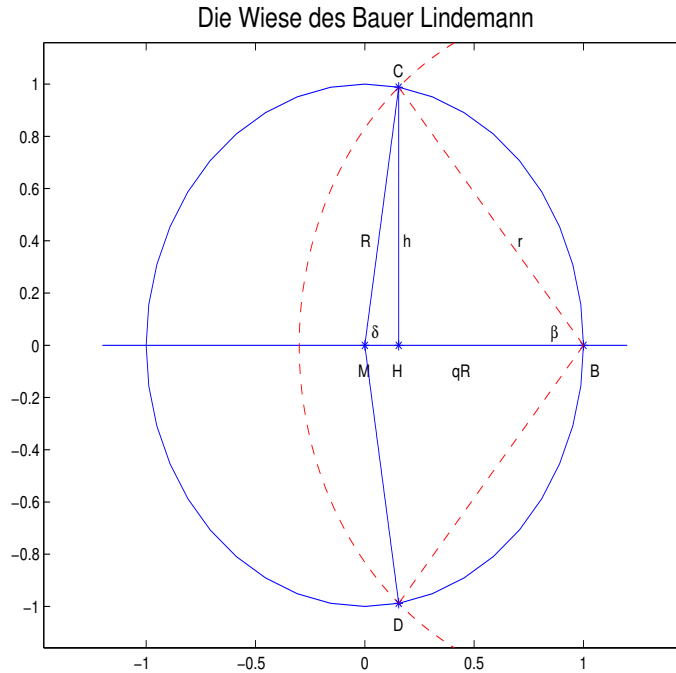


Abbildung 1.1: Eine kreisrunde Wiese

Wir führen die Bestimmung des gesuchten Radius r auf die Bestimmung des Winkels β zurück und beachten hierzu, dass die Winkelsumme im gleichschenkligen Dreieck $\triangle BMC$ gerade (im Bogenmaß) π ist, so dass $\delta + 2\beta = \pi$ bzw. $\delta = \pi - 2\beta$. Weiter beachte man, dass

$$\cos \beta = \frac{qR}{r} = \frac{1}{2} \left(\frac{r}{R} \right)^2,$$

so dass $r = 2R \cos \beta$. Dann kann der Flächeninhalt F alleine in Abhängigkeit des Radius R des gegebenen Kreises und des Winkels β angegeben werden:

$$\begin{aligned} F &= \beta r^2 + \delta R^2 - rR \left[1 - \frac{1}{4} \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]^{1/2} \\ &= 4R^2 \beta \cos^2 \beta + (\pi - 2\beta) R^2 - 2R^2 \cos \beta \sin \beta \\ &= R^2 [2\beta(1 + \cos(2\beta)) + \pi - 2\beta - \sin(2\beta)] \\ &= R^2 [2\beta \cos(2\beta) + \pi - \sin(2\beta)]. \end{aligned}$$

Die Forderung, dass der Flächeninhalt F die Hälfte des Flächeninhaltes des Kreises mit dem Radius R ist, führt auf die Gleichung

$$R^2 [2\beta \cos(2\beta) + \pi - \sin(2\beta)] = \frac{1}{2} \pi R^2.$$

Der Winkel $\beta \in (0, \pi/2)$ ist also als Lösung von

$$2\beta \cos(2\beta) + \frac{\pi}{2} - \sin(2\beta) = 0$$

zu bestimmen. Macht man die Variablentransformation $\gamma = 2\beta$, so ist also eine Nullstelle γ^* von

$$f(\gamma) := \gamma \cos \gamma + \frac{\pi}{2} - \sin \gamma$$

in $(0, \pi)$ zu bestimmen, anschließend ist der gesuchte Radius r^* durch

$$r^* = 2R \cos \frac{\gamma^*}{2}$$

gegeben. Die mathematische Modellierung ist damit abgeschlossen. Das gegebene Problem ist auf ein Standardproblem der angewandten Mathematik, nämlich die Bestimmung einer Nullstelle einer bestimmten Funktion, zurückgeführt worden.

In Abbildung 1.2 geben wir einen Plot von f über dem Intervall $[0, \pi]$ an. An diesem

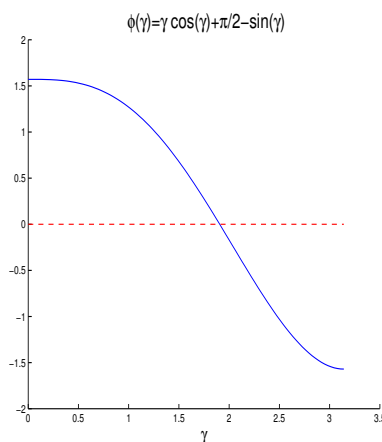


Abbildung 1.2: Die Funktion $f(\gamma) = \gamma \cos \gamma + \pi/2 - \sin \gamma$

Plot erkennt man, dass f genau eine Nullstelle γ^* im Intervall $(0, \pi)$ besitzt, außerdem erkennt man, dass $\gamma^* \approx 2$. Ein exakter Beweis für ersteres ist einfach, denn es ist $f(0) = \pi/2 > 0$, $f(\pi) = -\pi/2$, so dass f wegen des Zwischenwertsatzes in $(0, \pi)$ eine Nullstelle γ^* besitzt. Ferner ist $f'(\gamma) = -\gamma \sin(\gamma) < 0$ auf $(0, \pi)$, also ist f auf $(0, \gamma)$ monoton fallend und die Nullstelle γ^* ist eindeutig. Damit ist die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung bewiesen.

Nun kommt die numerische Mathematik ins Spiel. Wie kann die Nullstelle einer nichtlinearen Gleichung bestimmt werden? Natürlich kann man es sich einfach machen und ein mathematisches Anwendersystem bemühen. Bei der Anwendung von Maple¹ erhält man z. B.

```
> gamm:=fsolve(gam*cos(gam)+Pi/2-sin(gam),gam);
      gamm := 1.905695729
```

¹Diese geringfügige Überarbeitung meiner Vorlesung von 2003 schreibe ich Anfang 2013. Hauptsächlich werden die ps-Files in pdf-Files umgewandelt. Inzwischen hat Mupad zumindestens lokal Maple oder gar Mathematica den Rang abgelassen. Von den deswegen eigentlich notwendigen Änderungen sehe ich aber ab.

```
> r:=2*cos(gamm/2)*R;
      r := 1.158728473 R
```

Zum Vergleich setzen wir MATLAB ein. Zur numerischen Bestimmung einer Nullstelle einer reellwertigen Funktion einer Variablen gibt es hier die Funktion `fzero`. Das könnte z. B. folgendermaßen aussehen (am Anfang setzen wir `format long`, damit möglichst viele Dezimalen ausgegeben werden):

```
format long;
gamm=fzero(inline('gam*cos(gam)+pi/2-sin(gam)'),2);
faktor=2*cos(gamm)
```

Hier erhalten wir

```
gamm = 1.90569572930988,    faktor = 1.15872847301812.
```

Man erkennt, dass man bei der Anwendung von `fzero` einen Startwert angeben muss. Nun möchte man natürlich gerne wissen, wie `fsolve` oder `fzero` zu der angegebenen Nullstelle gekommen sind. Gefragt wird also nach Verfahren zur Nullstellenbestimmung. Es gibt viele solcher Verfahren, wir wollen drei von ihnen hier schon angeben und auf das obige Beispiel anwenden.

- Das Bisektionsverfahren.

Die Grundidee des Bisektionsverfahrens ist ganz einfach. Die (stetige) Funktion f habe an den Intervallenden a und b des Intervalls $[a, b]$ unterschiedliches Vorzeichen, es sei also $f(a)f(b) < 0$. Man berechne den Mittelpunkt $c := \frac{1}{2}(a + b)$. Wir nehmen an, es sei $f(c) \neq 0$ (andernfalls ist man fertig). Ist dann $f(a)f(c) < 0$, so sucht man weiter im Intervall $[a, c]$, andernfalls im Intervall $[c, b]$. In jedem Fall ist die Länge des Intervalls, in dem nach einer Nullstelle gesucht wird, halbiert worden. Es handelt sich hier um ein verhältnismäßig langsam konvergierendes, aber sicheres Verfahren, das im Prinzip eine Nullstelle beliebig genau lokalisieren kann. Weiter hat es den Vorteil, dass keine Ableitungen zu berechnen sind.

- Das Newton-Verfahren.

Diesmal wird angenommen, es sei f stetig differenzierbar (dort, wo sich alles abspielt). Sei γ_k eine Näherung für eine Nullstelle von f . Man approximiere f in der Nähe von γ_k durch eine lineare Funktion, die man durch Entwicklung von f an der Stelle γ_k gewinnt:

$$f(\gamma) \approx f_k(\gamma) := f(\gamma_k) + f'(\gamma_k)(\gamma - \gamma_k).$$

Anschließend bestimmt man die neue Näherung γ_{k+1} als Nullstelle von f_k . Dies führt auf die Iterationsvorschrift des Newton-Verfahrens, nämlich

$$\gamma_{k+1} := \gamma_k - \frac{f(\gamma_k)}{f'(\gamma_k)}.$$

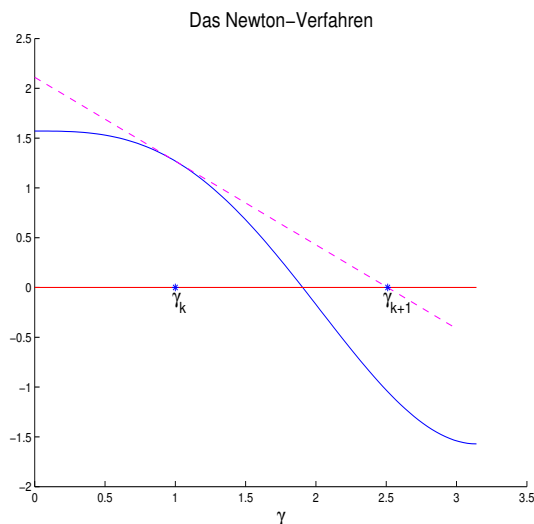


Abbildung 1.3: Veranschaulichung des Newton-Verfahrens

Anschaulich wird in $(\gamma_k, f(\gamma_k))$ die Tangente an f gelegt und ihr Schnitt mit der γ -Achse als neue Näherung genommen. Wir veranschaulichen uns dies in Abbildung 1.3. Nun geben wir noch einige numerische Werte an. Die Durchführung von 10 Schritten mit Maple könnte folgendermaßen aussehen:

```
> f:=gam->gam*cos(gam)+Pi/2-sin(gam);
      f := gam → gam cos(gam) +  $\frac{1}{2}$  π - sin(gam)
> g:=D(f);
      g := gam → -gam sin(gam)
> t:=1.0;
      t := 1.0
> for k from 1 to 10 do
> t:=t-evalf(f(t))/evalf(g(t));
> end do;
      t := 2.508819283
      t := 1.805379726
      t := 1.907061615
      t := 1.905695893
      t := 1.905695730
      t := 1.905695729
      t := 1.905695730
      t := 1.905695729
      t := 1.905695730
      t := 1.905695729
```

Trotz des schlechten Startwertes ist das Verfahren offenbar konvergent. Die Zahl benutzter Dezimalen kann man heraufsetzen, z. B. durch `Digits:=20;`. Man überzeuge sich von der schnellen Konvergenz!

- Das Sekantenverfahren.

Ersetzt man im Newton-Verfahren im Nenner $f'(\gamma_k)$ durch einen Differenzenquotienten, benutzt man also

$$f'(\gamma_k) \approx \frac{f(\gamma_k) - f(\gamma_{k-1})}{\gamma_k - \gamma_{k-1}},$$

so erhält man die Iterationsvorschrift des Sekantenverfahrens:

$$\gamma_{k+1} := \gamma_k - \frac{(\gamma_k - \gamma_{k-1})f(\gamma_k)}{f(\gamma_k) - f(\gamma_{k-1})}.$$

Es handelt sich hier im Gegensatz zum Newton-Verfahren um ein Zweischnittverfahren, am Anfang müssen also zwei Startwerte $\gamma_0 \neq \gamma_1$ vorgegeben werden. Offenbar ist γ_{k+1} Nullstelle der linearen Funktion

$$f_{k-1,k}(\gamma) := f(\gamma_k) + \frac{f(\gamma_k) - f(\gamma_{k-1})}{\gamma_k - \gamma_{k-1}}(\gamma - \gamma_k).$$

Wegen $f_{k-1,k}(\gamma_{k-1}) = f(\gamma_{k-1})$ und $f_{k-1,k}(\gamma_k) = f(\gamma_k)$ ist $f_{k-1,k}$ das die Funktion f in γ_{k-1} und γ_k *interpolierende* Polynom vom Grad ≤ 1 bzw. die Sekante durch $(\gamma_{k-1}, f(\gamma_{k-1}))$ und $(\gamma_k, f(\gamma_k))$. In Abbildung 1.4 verdeutlichen wir uns dieses Verfahren.

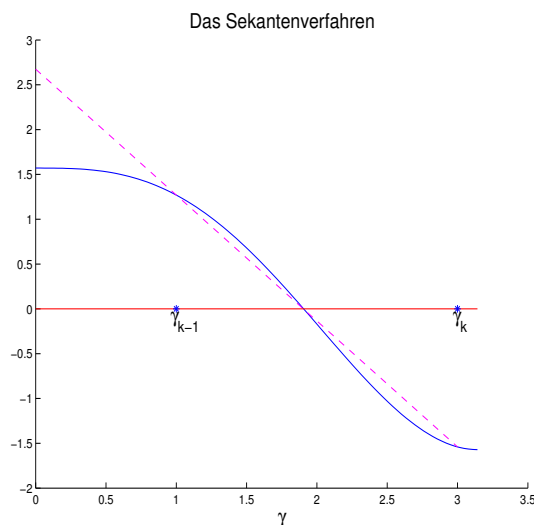


Abbildung 1.4: Veranschaulichung des Sekantenverfahrens

Mit Maple haben wir fünf Schritte des Sekantenverfahrens durchgeführt, wobei wir natürlich darauf achten, dass in jedem außer dem ersten Iterationsschritt nur eine Funktionsauswertung durchgeführt wird:

```
> f:=t->t*cos(t)+Pi/2-sin(t):
> Digits:=20:
> t_alt:=1.0: t_neu:=3.0:
```

```

> f_alt:=evalf(f(t_alt)): f_neu:=evalf(f(t_neu)):
> for k from 1 to 5 do
> t:=t_neu-(t_neu-t_alt)*f_neu/(f_neu-f_alt):
> print(t);f_alt:=f_neu:
> f_neu:=evalf(f(t)):
> t_alt:=t_neu: t_neu:=t:
> end do:

```

1.9036724626657761680
1.9062577801336857149
1.9056956284295787019
1.9056957293048809857
1.9056957293098838949

Wir geben jetzt auch noch eine MATLAB-Funktion `Sekant` an. Hierzu schreiben wir den folgenden Text in ein File `Sekant.m`:

```

function [t,f_t,info]=Sekant(fun,t_0,t_1,tol,max_iter);
%*****
%Nullstellenbestimmung mit Hilfe des Sekantenverfahrens
%*****
%Input-Parameter:
%   fun      Funktion, deren Nullstelle bestimmt wird
%   t_0, t_1  Zwei Startwerte
%   tol      Toleranz: STOP, wenn abs(fun(x))<=tol
%   max_iter  Maximale Zahl der Iterationen
%Output-Parameter:
%   t        gefundene Nullstelle
%   f_t      fun(t)
%   info     Ist info>0, so ist Verfahren erfolgreich
%            und info gibt die Zahl der Iterationen an
%            Ist info=0, so war das Verfahren nicht
%            erfolgreich.
%*****
t_alt=t_0; t_neu=t_1; iter=1;
f_alt=feval(fun,t_alt); f_neu=feval(fun,t_neu);
while (abs(f_neu)>tol)&(iter<max_iter)
    t=t_neu-(t_neu-t_alt)*f_neu/(f_neu-f_alt);
    t_alt=t_neu; t_neu=t;
    f_alt=f_neu; f_neu=feval(fun,t);
    iter=iter+1;
end;
if iter<max_iter
    f_t=f_neu;info=iter;
else
    info=0;
end;

```

Geben wir nach dem MATLAB-prompt » ein:

```
[t,f_t,info]=Sekant(inline('t*cos(t)+pi/2-sin(t)'),1.0,3.0,1e-12,10)
```

so erhalten wir (vorher haben wir noch `format long` eingegeben)

$$t = 1.90569572930988, \quad f_t = 2.220446049250313e - 16, \quad \text{info} = 6.$$

Auch wenn man keine Vorkenntnisse über MATLAB hat, sollte es möglich sei, die obige Funktion zu verstehen. \square

Beispiel: Schon als Kind versuchte man, “das Haus des Nikolaus” in einem Zug zu zeichnen, siehe Abbildung 1.5. Bekanntlich ist dies möglich, etwa durch den Kantenzug

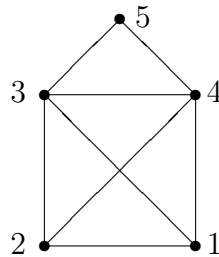


Abbildung 1.5: Das ist das Haus des Nikolaus

12, 23, 34, 45, 53, 31, 14, 42.

Wir werden das Haus des Nikolaus als einen *Graphen* interpretieren. Hierbei besteht ein Graph $G = (V, E)$ aus einer endlichen Menge $V = V(G)$, der Menge der *Ecken*, (hier steht V für **V**ertices) und einer Teilmenge $E = E(G)$ von (ungeordneten) Paaren aus V , der Menge der *Kanten* (wobei hier E für **E**dges steht, und nicht etwa für Ecken!). Die Anzahl der Ecken in einem Graphen heißt die *Ordnung* des Graphen, das Haus des Nikolaus besitzt daher die Ordnung 5. Ein Graph ist also dadurch gegeben, dass auf einer Menge von Ecken eine binäre Relation gegeben ist, welche gerade aussagt, ob zwei Ecken durch eine Kante verbunden sind. Hierdurch sind z. B. Schlingen (Verbindung einer Ecke mit sich selbst) und Mehrfachkanten ausgeschlossen. Wir sprechen von einem *Multigraphen*, wenn Schlingen und Mehrfachkanten vorkommen können. Der Deutlichkeit halber nennt man gelegentlich einen Graphen (ohne Schlingen und Mehrfachkanten) auch einen *einfachen* Graphen.

Berühmter und vor allem historisch wichtiger ist das Königsberger Brückenproblem. Links in Abbildung 1.6 haben wir schematisch die 7 Brücken über die Pregel in Königsberg angegeben. Euler stellte 1736 die Frage: Ist es möglich, einen Spaziergang durch Königsberg zu machen, wieder zum Anfangspunkt zurückzukehren und jede Brücke genau einmal zu überqueren? Diese Aufgabe wird am natürlichsten in einem *Multigraphen* formuliert, also in einem Graphen, in dem auch Schlingen und vor allem Mehrfachkanten zugelassen sind. Die Ecken in dem Graphen sind die vier Teile A, B, C, D von Königsberg, die Brücken bilden die Kanten. Da es zwei Brücken von A nach B (und von A nach C) gibt, gibt es zwei Kanten von A nach B (und von A nach C), weiter gibt es jeweils eine Kante von D nach A, B und C . Natürlich könnte man auch zu einem (einfachen) Graphen übergehen, indem man die 7 Brücken a, b, c, d, e, f, g als Hilfsecken einführt, siehe Abbildung 1.7. Die Frage, ob sich das Haus des Nikolaus in einem Zug zeichnen lässt, bzw. ob es einen zum Ausgangspunkt zurückführen Spaziergang durch

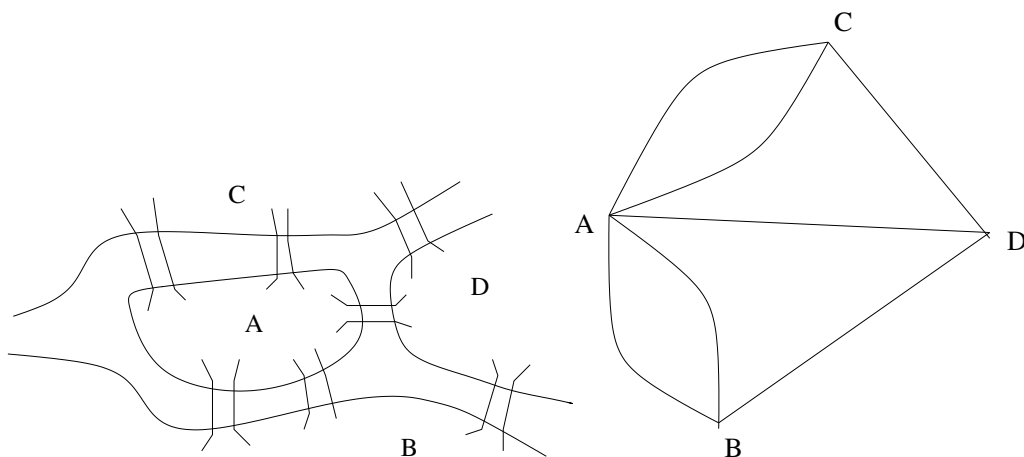


Abbildung 1.6: Die sieben Brücken von Königsberg

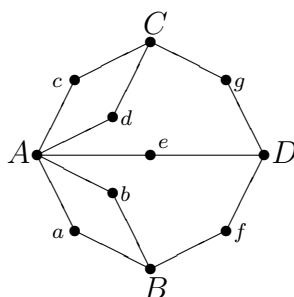


Abbildung 1.7: Das Königsberger Brückenproblem in einem einfachen Graphen

Königsberg gibt, bei welchem jede Brücke genau einmal überquert wird, ist die Frage nach einem *offenen* bzw. einem (*geschlossenen*) *Euler-Zug*. Hierbei ist ein *Kantenzug* eine Folge von paarweise verschiedenen Kanten, wobei aufeinanderfolgende Kanten jeweils eine Ecke gemein haben. Ein geschlossener Kantenzug², der jede der Kanten im Graphen genau einmal enthält, heißt ein *Euler-Zug*. Ein nicht notwendig geschlossener Kantenzug mit der selben Eigenschaft heißt ein *offener Euler-Zug*.

Wir werden später beweisen können (hierbei kommen einige Begriffe vor, die mehr oder weniger selbsterklärend sind und hier noch nicht genau definiert werden sollen):

- Ein Graph $G = (V, E)$ mit keinen isolierten Ecken und $E \neq \emptyset$ besitzt genau dann einen Euler-Zug, wenn G zusammenhängend ist und alle Ecken geraden Grad³ haben.
- Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph. Dann existiert genau dann von der Ecke $x \in V$ ein offener Euler-Zug zu der Ecke $y \in V \setminus \{x\}$, wenn x und y die einzigen Ecken mit ungeradem Grad sind.

Im Haus des Nikolaus in Abbildung 1.5 sind die Ecken 1 und 2 die einzigen Ecken mit

²Ein Kantenzug, bei dem die erste und die letzte Kante eine Ecke gemein haben.

³Der Grad einer Ecke ist die Anzahl der Kanten, mit denen diese Ecke inzidiert bzw. auf denen sie liegt.

ungeradem Grad. Nur von diesen Ecken anfangend kann man das Haus des Nikolaus ohne abzusetzen zeichnen. Der Graph in Abbildung 1.7, welcher Königsberg und seine Brücken in einem einfachen Graphen modelliert, besitzt ganz offensichtlich Ecken mit ungeradem Grad. Es gibt daher in diesem Graphen keinen Euler-Zug⁴.

Maple stellt einige Hilfsmittel zur Bearbeitung graphentheoretischen Aufgaben zur Verfügung. Diese werden mit Hilfe von `with(networks)`; aktiviert. Wir gehen hierauf später ein und bleiben dabei im wesentlichen bei Maple, auch wenn das Konkurrenzsystem Mathematica hier Vorteile hat. Denn das `DiscreteMath`Combinatorica`` package in Mathematica ist doch wesentlich reichhaltiger als das `networks` package in Maple. Z. B. gibt es in letzterem keine Funktionen, um festzustellen, ob es in einem Graphen einen Euler-Zug gibt (dies ist allerdings einfach) oder gegebenenfalls einen Euler-Zug zu berechnen. □

Beispiel: Wir übernehmen ein Beispiel bei V. Chvátal⁵. Es handelt sich um eine vereinfachte Version eines der ersten praktisch durchgerechneten linearen Optimierungsaufgaben, auf das wir im Anschluss noch eingehen werden.

Polly möchte gerne wissen, wieviel Geld sie für ein Essen ausgeben muss, welches ihren Bedarf an Energie (2000 kcal), Proteinen (55 g) und Calcium (800 mg) deckt. (Um das Beispiel einfach zu halten, nimmt sie für Eisen- und Vitaminbedarf Pillen.) Sie wählt sechs Nahrungsmittel, welche relativ preiswert zu sein scheinen. Die entsprechenden Daten sind der folgenden Tabelle zu entnehmen⁶. “Then she begins to think about her menu. For example, 10 servings of pork with beans would take care of all her needs for only (?) \$ 1.90 per day. On the other hand, 10 servings of pork with beans

⁴Das Buch

H.-R. HALDER, W. HEISE (1976) *Einführung in die Kombinatorik*. Carl Hanser Verlag, München erschien auch in einer Lizenzausgabe in der DDR. Beiden Ausgaben liegt eine mit einer Schreibmaschine geschriebene Fassung des Textes zu Grunde. Auf S. 118 ff. wird das Königsberger Brückenproblem behandelt. In dem Text zu Beginn dieses Abschnittes sind einige Buchstaben etwas fetter geschrieben, außerdem tanzen diese ein wenig aus der Reihe. Letzteres können wir hier nicht so gut nachmachen, ersteres machen wir aber etwas deutlicher, damit die Botschaft von Halde-Heise leichter zu lesen ist: In Königsberg i. Pr. gabelt sich der Pregel und umfließt eine Insel, die Kneiphof heißt. In den dreißiger Jahren des achtzehnten Jahrhunderts wurde das Problem gestellt, ob es wohl möglich wäre, in einem Spaziergang jede der sieben Königsberger Brücken genau einmal zu überschreiten.

Daß ein solcher Spaziergang unmöglich ist, war für L. EULER der Anlaß, mit seiner anno 1735 der Akademie der Wissenschaften in St. Petersburg vorgelegten Abhandlung *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis* (Commentarii Academiae Petropolitanae 8 (1741) 128–140) einen der ersten Beiträge zur Topologie zu liefern.

Das Problem besteht darin, im nachfolgend gezeichneten Graphen einen einfachen Kantenzug zu finden, der alle Kanten enthält. Dabei repräsentiert die Ecke vom Grad 5 den Kneiphof und die beiden Ecken vom Grad 2 die Krämerbrücke sowie die Grüne Brücke.

Als die Botschaft (Nieder mit dem Sowjetimperialismus) in der DDR ankam, wurde die restliche Auflage eingestampft.

⁵V. CHVÁTAL (1980) *Linear Programming*. W. H. Freeman, New York.

⁶Wir geben keine Übersetzung an, so dass auch Gelegenheit besteht, einige englische Vokabeln zu lernen.

⁷Haferbrei

⁸Vollmilch

⁹Kirschkuchen

Nutritive Value per Serving

Food	Serving size	Energy (kcal)	Protein (g)	Calcium (mg)	Price per serving (cents)
Oatmeal ⁷	28 g	110	4	2	3
Chicken	100 g	205	32	12	24
Eggs	2 large	160	13	54	13
Whole milk ⁸	237 cc	160	8	285	9
Cherry pie ⁹	170 g	420	4	22	20
Pork with beans	260 g	260	14	80	19

is a lot of pork with beans—she would not be able to stomach more than 2 servings a day. She decides to impose servings-per-day limits on all six foods:

Oatmeal at most 4 servings per day
 Chicken at most 3 servings per day
 Eggs at most 2 servings per day
 Milk at most 8 servings per day
 Cherry pie at most 2 servings per day
 Pork with beans at most 2 servings per day.

Ein “Menu” besteht aus x_1 Portionen Haferbrei, x_2 Portionen Huhn usw. Um ein möglichst billiges Menu zusammenzustellen, das allen Nebenbedingungen genügt, hat Polly offenbar die folgende Optimierungsaufgabe zu lösen.

$$\text{Minimiere} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 24 \\ 13 \\ 9 \\ 20 \\ 19 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix}$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 8 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} 110 & 205 & 160 & 160 & 420 & 260 \\ 4 & 32 & 13 & 8 & 4 & 14 \\ 2 & 12 & 54 & 285 & 22 & 80 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 2000 \\ 55 \\ 800 \end{pmatrix}.$$

Diese Optimierungsaufgabe haben wir in Matrix-Vektorschreibweise geschrieben, um uns gleich schon daran zu gewöhnen. Ferner haben wir für Vektoren die “ \leq ”- (oder “ \geq ”-) Beziehung komponentenweise benutzt. Wenn die Portionen “gequantelt” sind, also nicht etwa 1.39 Portionen Schwein mit Bohnen bestellt werden können (für die Eier trifft das wohl zu), so hat man sogar eine ganzzahlige lineare Optimierungsaufgabe.

Im obigen Beispiel ist es klar, dass das Problem eine Lösung besitzt. Denn man weist leicht nach, dass die Menge der zulässigen Menus eine nichtleere, kompakte Menge (im \mathbb{R}^6) bildet. Da die Zielfunktion natürlich stetig ist, ist die Existenz einer Lösung gesichert. Wir wollen nun die (beschränkten) Möglichkeiten von Maple zur Lösung linearer Optimierungsaufgaben untersuchen. Mit `with(simplex);` lädt man ein Zusatzpaket. Hierdurch stehen die Befehle `minimize` und `maximize` zur Verfügung. Wir lösen das Problem folgendermaßen:

```

> Ziel:=3*x1+24*x2+13*x3+9*x4+20*x5+19*x6:
> Bed1:=110*x1+205*x2+160*x3+160*x4+420*x5+260*x6>=2000:
> Bed2:=4*x1+32*x2+13*x3+8*x4+4*x5+14*x6>=55:
> Bed3:=2*x1+12*x2+54*x3+285*x4+22*x5+80*x6>=800:
> Bed:={Bed1,Bed2,Bed3,x1<=4,x2<=3,x3<=2,x4<=8,x5<=2,x6<=2}:
> minimize(Ziel,Bed,NONNEGATIVE);

```

$$\{x_4 = \frac{9}{2}, x_1 = 4, x_2 = 0, x_3 = 0, x_6 = 0, x_5 = 2\}$$

Als Lösung erhält man daher

$$x = (4, 0, 0, \frac{9}{2}, 2, 0)^T.$$

Also ist im optimalen Menu nur die Milch kein ganzzahliger Betrag, was hier durchaus vernünftig ist. Bequemer ist die Anwendung der MATLAB-Funktion `linprog`, die in der Optimization Toolbox enthalten ist. Wir wollen hierauf aber (noch) nicht eingehen.

Wie man bei G. B. Dantzig¹⁰ (S. 625 ff.) nachlesen kann, war eine der ersten Anwendungen des Simplexverfahrens zur Lösung linearer Programme die Bestimmung eines ausreichenden Speiseplans bei möglichst niedrigen Kosten. Dieses Problem wurde zuerst von G. J. Stigler untersucht. Gegeben seien n Lebensmittel (bei Stigler ist $n = 77$, die Lebensmittel sind u. a. Weizenmehl, Maismehl, Kondensmilch, Margarine, Cheddar-Käse, Erdnussbutter, Schmalz, Rindsleber, Schweinelendenbraten, Lachs, grüne Bohnen, Kohl, Zwiebeln, Kartoffeln, Spinat, Süßkartoffeln, getrocknete Pfirsiche, getrocknete Pflaumen, Lima-Bohnen, weiße Bohnen), welche m Nährwerte (bei Stigler ist $m = 9$, die Nährwerte sind Kalorien, Eiweiß, Kalzium, Eisen, Vitamin A, Vitamin B₁, Vitamin B₂, Nicotinsäureamid, Vitamin C) enthalten. Sei a_{ij} die Anzahl der Mengeneinheiten des i -ten Nährwertes in einer Mengeneinheit des j -ten Lebensmittels. Eine zulässige Diät muss mindestens b_i Einheiten des i -ten Nährwertes enthalten. So wird z. B. bei Dantzig angegeben, dass ein mäßig aktiver Mann, der 70 kg wiegt, als täglichen Bedarf 3000 Kalorien, 70 g Eiweiß, 0.8 g Kalzium, 12 g Eisen usw. benötigt. Bekannt sei ferner der Preis c_j einer Einheit des j -ten Lebensmittels. Ein Diätplan besteht in

¹⁰G. B. DANTZIG (1966) *Lineare Programmierung und Erweiterungen*. Springer, Berlin-Heidelberg-New York.

der Angabe eines Vektors $x = (x_j) \in \mathbb{R}^n$, wobei x_j die Anzahl der Einheiten des j -ten Hilfsmittels angibt. Dieser ist zulässig, wenn durch ihn die Mindestanforderungen an die enthaltenen Nahrungsmittel sämtlich erfüllt sind, wenn also

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i, \quad i = 1, \dots, m.$$

Die zugehörigen Kosten sind $\sum_{j=1}^n c_j x_j$. Ferner berücksichtige man, dass die Komponenten x_j eines Diätplans x sämtlich nichtnegativ sein müssen, schließlich soll einem auch bei einer Diät etwas zugeführt und nicht weggenommen werden. Geht man noch zur Vektor- bzw. Matrixschreibweise über, setzt also $A := (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b := (b_i) \in \mathbb{R}^m$ und $c := (c_j) \in \mathbb{R}^n$, so kommt man zum linearen Programm

$$\text{Minimiere } c^T x \quad \text{auf } M := \{x \in \mathbb{R}^n : x \geq 0, Ax \geq b\}.$$

Hierbei verstehen wir die Relation “ \geq ” (entsprechendes gilt aber natürlich auch für die Relation “ \leq ”) zwischen Vektoren *komponentenweise*. So bedeutet etwa $x \geq 0$, dass sämtliche Komponenten x_j , $j = 1, \dots, n$, nichtnegativ sind. Im obigen konkreten Beispiel waren noch obere Schranken für die Komponenten des Menus vorgegeben. \square

Beispiel: Für einige Jahre¹¹ entledigte man sich in den USA eines Teils des radioaktiven Mülls, indem dieser in Fässer kam, die in die See geworfen wurden. Es wurde davon ausgegangen (nach hoffentlich sorgfältigen Tests), dass die Fässer so dicht sind, dass eine Lagerung unbedenklich ist. Es stellte sich aber die Frage, ob eine zu hohe Aufprallgeschwindigkeit zu einem Leck führen könnte. Nach Tests ergab sich, dass die Fässer ab einer Aufprallgeschwindigkeit von 12.2 m/sec platzen konnten, so dass die Aufgabe darin besteht, die Aufprallgeschwindigkeit zu ermitteln.

Ein Fass wiege $m := 240$ kg, das Volumen sei $V := 0.21$ m³. Der Wasserwiderstand D sei proportional zur Geschwindigkeit v des Fasses: $D = cv$, wobei durch Experimente $c = 0.12$ kg · sec/m festgestellt wurde. Durch den Auftrieb erleidet das Fass einen Gewichtsverlust B , der gleich dem Gewicht des verdrängten Salzwassers ist (Prinzip des Archimedes). Daher ist B das Produkt aus Volumen $V = 0.21$ m³ des Fasses und der Dichte 1025 kg/m³ von Salzwasser, also ist $B = 215.25$ kg. Bezeichnet man mit $x(t)$ die Tiefe des Fasses zur Zeit t ($x = 0$ sei die Meeresoberfläche), so lautet die Newtonsche Bewegungsgleichung daher

$$m\ddot{x} = g(m - B - cv) = g(m - B - c\dot{x}),$$

wobei $g = 9.81$ m/sec². Ferner sind die Anfangsbedingungen

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0$$

gegeben.

Bei welcher Wassertiefe übersteigt die Geschwindigkeit v die kritische Aufprallgeschwindigkeit von 12.2 m/sec?

¹¹Siehe M. BRAUN (1975, S. 68 ff.). Das Buch von Braun ist in diversen Auflagen und auch in einer deutschen Übersetzung bei Springer herausgekommen.

Die Lösung ist, wenn man Maple einsetzt, sehr einfach. Zunächst muss man die Anfangswertaufgabe

$$240\ddot{x} = 9.81(24.75 - 0.12\dot{x}), \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0$$

symbolisch lösen. Dies kann durch

```
sol:=dsolve({240*(D@@2)(x)(t)=9.81*(24.75-0.12*D(x)(t)),x(0)=0,D(x)(0)=0},x(t));
```

geschehen. Man erhält

$$x(t) = \frac{13750000}{327} [\exp(-981t/200000) - 1] + \frac{825}{4}t.$$

Durch `x:=unapply(rhs(sol),t)`; wird die Funktion x definiert. Ihre Ableitung v erhält man durch `v:=D(x)`; . Es ist

$$v(t) = -\frac{825}{4} \exp(-981t/200000) + \frac{825}{4}.$$

Anschließend kann man die Zeit, zu der die Geschwindigkeit den Grenzwert 12.2 annimmt und die entsprechende Wassertiefe durch

```
t_A:=solve(v(t)=12.2,t); x_A:=x(t_A);
```

bestimmen. Man erhält

$$t_A = 12.43081904, \quad x_A = 76.59854.$$

Die kritische Wassertiefe ist also etwa 76.6 m. □

Nun haben wir vier Probleme "aus dem täglichen Leben" geschildert, ihnen ein mathematisches Modell zugeordnet und dieses gelöst. In den folgenden vier Kapiteln wollen wir genau auf die entsprechenden Klassen von mathematischen Problemen eingehen, welchen die obigen vier Beispiele zuzuordnen sind. Genauer sind dies:

- Lineare und nichtlineare Gleichungen.
- Graphentheorie.
- Optimierung und Approximation.
- Gewöhnliche Differentialgleichungen.

Wir werden jeweils nur eine Einführung in die entsprechenden Problemklassen geben können, da man über alle vier Themenkreise ohne Schwierigkeiten jeweils eine ganze Vorlesungsreihe halten könnte. Es kommt uns dabei darauf an, eine möglichst bunte Darstellung des Stoffes zu geben.

Zusätzlich werden wir noch in einem kurzen Kapitel auf die wesentlichen Typen von *partiellen Differentialgleichungen* eingehen. Diesen Teil übernehmen wir aus einer Vorlesung aus dem Sommersemester 2000. In dieser Vorlesung wurde Mathematica als mathematisches Anwendersystem zugrunde gelegt.

1.1 Aufgaben

- Ein¹² Öltank hat die Gestalt eines liegenden Zylinders vom Radius 1m. Wie hoch steht das Öl, wenn der Tank zu $\frac{1}{4}$ seines Fassungsvermögens gefüllt ist?
- Man konstruiere eine möglichst billige Dose (mathematisch: Kreiszyylinder) mit Radius r und Höhe h , welche ein vorgegebenes Volumen $V > 0$ besitzt. Die Kosten des Bodens und des Deckels seien $c_1 > 0$ Geldeinheiten (etwa Euro) pro Quadratinheit (etwa cm^2), entsprechend die des Mantels $c_2 > 0$ Geldeinheiten.
- Man finde in dem in Abbildung 1.8 angegebenen Graphen einen Euler-Zug.

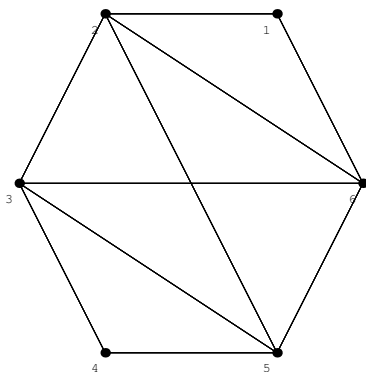


Abbildung 1.8: Das (erweiterte) Haus des Nikolaus

- Gegeben sei ein Graph G mit $4 \cdot 4 = 16$ Ecken. Diese denke man sich in einem Quadrat angeordnet. Zwei Ecken seien durch eine Kante verbunden, wenn man in einem Rösselsprung von der einen zur anderen Ecke gelangen kann.
 - Man rufe Maple auf und informiere sich durch `?networks` über das `networks` package.
 - Man generiere obigen Graphen und zeichne ihn mit Hilfe des `draw` Befehls.
 - Mit Hilfe von `degreeseq` bestimme man die Folge der Grade der Ecken und entscheide, ob es im Graphen einen Euler-Zug gibt.
 - Ist der Graph zusammenhängend, d. h. lassen sich je zwei Ecken durch einen Kantenzug verbinden?
 - Gibt es einen *Hamilton-Kreis* in dem Graphen, d. h. kann man mit dem Springer so über die 16 Felder springen, dass man jedes Feld (bis auf das erste) genau einmal trifft und am Schluss wieder im Ausgangsfeld ist?
- In¹³ einem landwirtschaftlichen Betrieb sollen Roggen und Kartoffeln angebaut werden. Bezogen auf 1 Morgen Anbaufläche benötigt man hierzu bei Kartoffeln Anbaukosten von

¹²Diese Aufgabe haben wir

L. COLLATZ, J. ALBRECHT (1972) *Aufgaben aus der Angewandten Mathematik*. Vieweg, Braunschweig entnommen.

¹³Diese Aufgabe haben wir

L. COLLATZ, W. WETTERLING (1971) *Optimierungsaufgaben*. Springer, Berlin-Heidelberg-New York entnommen.

5 Euro, einen Aufwand an Arbeitszeit von 2 Stunden und erhält dafür einen Reingewinn von 20 Euro. Die entsprechenden Daten für Roggen sind 10 Euro, 10 Stunden und 60 Euro. Die Anbauflächen für Roggen und Kartoffeln sind so zu wählen, dass der gesamte Reingewinn maximal wird. Hierbei stehen 1200 Morgen Land, 7000 Euro und 5200 Arbeitsstunden zur Verfügung.

Man formuliere diese Aufgabe als lineare Optimierungsaufgabe, stelle die Menge der zulässigen Lösungen (hierzu kann man `inequal` aus dem `plots`-package von Maple benutzen) und die Zielfunktion in der Ebene graphisch dar und bestimme eine Lösung. Diese Lösung vergleiche man mit der durch Maple gefundenen Lösung.

6. Sie wollen Ihrer Tante (vielleicht eine reiche Erbtante?) zum Geburtstag eine Freude machen. Ihre Tante trinkt gerne einen süßen Wein und da Ihnen eine Beerenauslese zu teuer ist, kommen Sie auf die Idee, ihr einen Liter Wein zukommen zu lassen, den Sie selbst zusammengestellt haben.

Hierzu können Sie einen Landwein für 1.00 Euro pro Liter, zur Anhebung der Süße Diäthylenglykol-haltiges Frostschutzmittel für 1.20 Euro pro Liter und für eine Verbesserung der Lagerungsfähigkeit eine Natriumacid-Lösung für 1.80 Euro pro Liter kaufen. Verständlicherweise wollen Sie eine möglichst billige Mischung herstellen, wobei aber folgende Nebenbedingungen zu beachten sind: Um eine hinreichende Süße zu garantieren, muss die Mischung mindestens $1/3$ Frostschutzmittel enthalten. Andererseits muss (z. B. wegen gesetzlicher Bestimmungen) mindestens halb soviel Wein wie Frostschutzmittel enthalten sein. Der Natriumacid-Anteil muss mindestens halb so groß, darf aber andererseits höchstens so gross wie der Glykol-Anteil sein und darf die Hälfte des Weinanteils nicht unterschreiten.

Man formuliere die Aufgabe, einen kostenminimalen Wein herzustellen, als eine lineare Optimierungsaufgabe und löse sie mit Hilfe von Maple.

7. Man betrachte eine große Population von N Individuen. Geburten, "natürliche Tode", Ein- und Auswanderungen mögen vernachlässigt werden. Es grassiere eine Krankheit, die sich durch Kontakt zwischen Individuen ausbreitet. Diese Krankheit sei so beschaffen, dass ein Individuum entweder durch sie stirbt oder nach einer Genesung immun gegen sie wurde. Die Population kann dann in drei Klassen eingeteilt werden.
- In der Klasse S sind die anfälligen (susceptibles) zusammengefasst, also diejenigen, die die Krankheit noch nicht bekommen haben und nicht gegen sie immun sind. Ihre Zahl zur Zeit t sei $S(t)$.
 - In der Klasse I sind die infizierten enthalten, also diejenigen, die die Krankheit haben und andere anstecken können. Zur Zeit t sei ihre Zahl $I(t)$.
 - Zur Klasse R gehört der Rest (removed), genauer also diejenigen, die tot, isoliert oder immun sind. $R(t)$ sei die Anzahl der Individuen der Klasse R zur Zeit t .

Die Krankheit genüge der folgenden Gesetzmäßigkeit.

- (a) Die Änderungsrate der anfälligen Population ist proportional zur Anzahl der Kontakte zwischen anfälliger und infizierter Population. Wir nehmen daher an, es sei

$$S' = -\beta SI$$

mit einer Konstanten (der sogenannten Infektionsrate) $\beta > 0$.

- (b) Individuen werden aus der Klasse I der Infizierten mit einer Rate entfernt (sie sterben, werden isoliert oder immun), die proportional zu ihrer Anzahl ist. Daher ist

$$I' = \beta SI - \gamma I, \quad R' = \gamma I.$$

Mit S_0, I_0 seien die positiven Populationen der Klassen S und I zur Anfangszeit $t = 0$ bezeichnet. Zu dieser Zeit sei noch niemand an der Krankheit gestorben bzw. ihretwegen isoliert oder immun. Man hat daher die Anfangswertaufgabe

$$(P) \quad \begin{aligned} S' &= -\beta SI, & S(0) &= S_0, \\ I' &= \beta SI - \gamma I, & I(0) &= I_0, \\ R' &= \gamma I, & R(0) &= 0. \end{aligned}$$

Dies ist das sogenannte Kermack-McKendrick-Modell für die Ausbreitung ansteckender Krankheiten. Wir gehen davon aus, dass obige Anfangswertaufgabe eine eindeutige Lösung (S, I, R) auf $[0, \infty)$ besitzt. Man zeige (die ersten beiden Aussagen sind anschaulich völlig trivial, müssen aber trotzdem bewiesen werden):

- (a) Es sind $I(\cdot)$ und $S(\cdot)$ auf $[0, \infty)$ positiv.
 (b) Es ist $S(\cdot)$ auf $[0, \infty)$ monoton fallend. Daher existiert $S_\infty := \lim_{t \rightarrow \infty} S(t)$.
 (c) Es ist $S(t) + I(t) - (\gamma/\beta) \ln S(t) = \text{const}$ für alle t .
 (d) Ist $S_0 > \gamma/\beta$, so kommt es zu einer Epidemie in dem Sinne, dass es ein $t > 0$ mit $I(t) > I_0$ gibt. Weiter gibt es ein $t^* > 0$ derart, dass $I(\cdot)$ auf $[0, t^*]$ monoton wachsend und auf $[t^*, \infty)$ monoton fallend ist. Es ist $\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = 0$ und S_∞ ist die eindeutige Lösung der transzendenten Gleichung

$$S_0 \exp\left(-\frac{(N-x)\beta}{\gamma}\right) - x = 0.$$

- (e) Ist $S_0 < \gamma/\beta$, so ist $I(\cdot)$ auf $[0, \infty)$ monoton fallend und $\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = 0$. Es kommt also zu keiner Epidemie und die Krankheit verschwindet letztendlich.

Hinweis: Es kann zweckmäßig sein, zunächst die folgende Aussage zu beweisen:

- Sei $h: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann besitzt die Anfangswertaufgabe $x' = h(t)x$, $x(0) = x_0$ die eindeutige Lösung

$$x(t) = x_0 \exp\left(\int_0^t h(\tau) d\tau\right).$$

8. Das Wachstumsgesetz von B. Gompertz (1779-1865) soll das Wachsen von Tumoren gut beschreiben. Es basiert auf der Anfangswertaufgabe

$$V' = -rV \ln\left(\frac{V}{K}\right), \quad V(0) = V_0.$$

Hierbei sind r und $K > 0$ gegebene Konstanten, $V(t)$ die Größe des Tumors zur Zeit t und $V_0 > 0$ der Anfangszustand. Mit Hilfe von Maple finde man einen Lösungskandidaten für diese Anfangswertaufgabe. Anschließend verifiziere man, dass es sich bei dem Kandidaten wirklich um eine Lösung handelt. Für $V_0 := 1$, $r := 2$ und $K := 3$ plote man die Lösung schließlich auf dem Intervall $[0, 5]$.

