

# Kapitel 3

## Graphentheorie

In diesem Kapitel wollen wir einen kleinen Einblick in die Graphentheorie geben. Wie in der Einführung schon erläutert wurde, besteht ein Graph  $G = (V, E)$  aus einer endlichen Menge  $V = V(G)$ , der Menge der *Ecken*, und einer Teilmenge  $E = E(G)$  von (ungeordneten) Paaren aus  $V$ , der Menge der *Kanten*. Wir werden uns i. Allg. auf die Untersuchung *einfacher* Graphen beschränken (Schleifen und Mehrfachkanten sind nicht erlaubt), auch wenn diese Einschränkung oft nicht wichtig ist.

**Beispiel:** Seien die Ecken in einem Graphen gewisse Städte in Nordamerika, etwa New York, Toronto, Los Angeles, San Francisco, Chicago, Denver, New Orleans. Zwei Städte bzw. Ecken sind durch eine Kante verbunden, wenn es Direktflüge (jeweils in beiden Richtungen, d. h. es ist keine Richtung ausgezeichnet) zwischen den Städten gibt. Es möge z. B. Flüge von New York nach Los Angeles, Toronto, Chicago, von Los Angeles nach San Francisco, Denver, Chicago, von Chicago nach Toronto, New Orleans und schließlich von San Francisco nach Denver geben. In Abbildung 3.1 veranschaulichen wir das. Diese Abbildung haben wir mit Maple hergestellt, genauer mit den folgenden

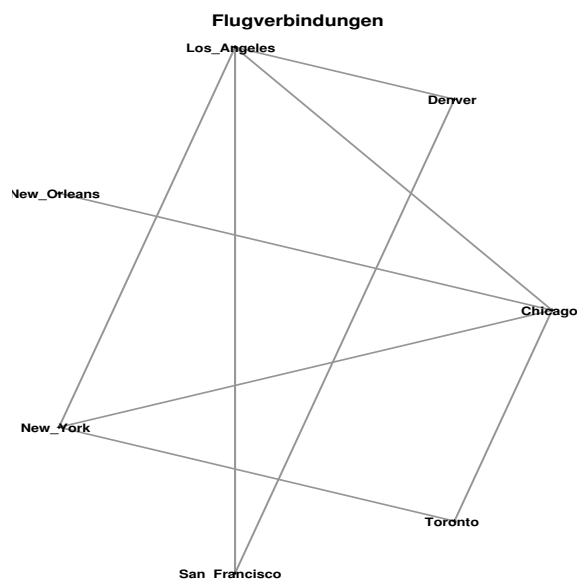


Abbildung 3.1: Flugverbindungen in Nordamerika

Befehlen:

```
> restart;with(networks):
> staedte:=
> {New_York,Toronto,Los_Angeles,San_Francisco,Chicago,Denver,New_Orleans}:
> new(G):
> addvertex(staedte,G):
> connect({New_York},{Los_Angeles,Toronto,Chicago},G):
> connect({Los_Angeles},{San_Francisco,Denver,Chicago},G):
> connect({Chicago},{Toronto,New_Orleans},G):
> connect({San_Francisco},{Denver},G):
> S:=draw(G):
> with(plots,display):
> display([S],font=[HELVETICA,BOLD,10],titlefont=[HELVETICA,BOLD,14],ti
> tle='Flugverbindungen',thickness=3):
```

Nicht von jeder Stadt kann man in jede andere einen Direktflug buchen, d. h. der obige Graph ist kein *vollständiger Graph*.  $\square$

Wir wollen versuchen, ohne viele formale Definitionen problemorientiert einzuführen. Z. B. dürfte klar sein, wann wir einen Graphen *zusammenhängend* nennen: Je zwei Ecken müssen durch einen Kantenzug verbunden werden können. Der Graph in Abbildung 3.1 ist z. B. zusammenhängend: Eventuell mit Umsteigen kann man von jeder Stadt in jede andere fliegen. Nach `components(G)` erhält man alle 7 Städte in  $G$ , d. h. es gibt nur eine Zusammenhangskomponente.

## 3.1 Euler-Züge und Hamilton-Kreise

### 3.1.1 Beispiele

Auf das Königsberger Brückenproblem und das Haus des Nikolaus sind wir in der Einführung schon eingegangen. Allgemein heißt ein Graph  $G = (V, E)$  ein *Eulerscher Graph*, wenn es in ihm einen *Euler-Zug* gibt, d. h. einen geschlossenen Kantenzug<sup>1</sup>, der jede Kante genau einmal enthält. Ein nicht notwendig geschlossener Kantenzug, der jede Kante im Graphen genau einmal enthält heißt ein *offener Euler-Zug*. Ein Graph, in dem es einen offenen Euler-Zug gibt, heißt ein *semi-Eulerscher Graph*.

**Beispiel:** Der Fahrer eines Schneepfluges möchte, ausgehend vom Depot, jede Straße (keine davon ist eine Einbahnstraße) eines gewissen Bezirkes genau einmal befahren und am Schluss wieder im Depot landen. Wenn man sich die Straßen als Kanten in einem Graphen vorstellt, so will der Fahrer also einen Euler-Zug finden.  $\square$

Wir hatten in der Einführung schon notwendige und hinreichende Bedingungen dafür angegeben, dass ein Graph  $G = (V, E)$  Eulersch bzw. semi-Eulersch ist. Entscheidend ist hierbei der Begriff des *Grades* einer Ecke. Ist  $x \in V$  eine Ecke und  $(x, y) \in E$  eine Kante (es ist  $x \neq y$ , da wir in einem einfachen Graphen, und damit beschäftigen wir

<sup>1</sup>Ein *Kantenzug* ist eine Folge von paarweise verschiedenen Kanten, wobei aufeinanderfolgende Kanten eine gemeinsame Ecke haben.

uns nur, keine *Schlinge* zulassen), so heißen  $x$  und  $y$  benachbart. Der Grad  $d(x)$  einer Ecke  $x \in V$  ist die Anzahl benachbarter Ecken. Auf einen Beweis der entsprechenden Bedingungen, die einen (semi-) Eulerschen Graphen charakterisieren, wollen wir im nächsten Unterabschnitt eingehen. Jedenfalls stellt es sich als ziemlich einfach heraus zu entscheiden, ob ein gegebener Graph (semi-) Eulersch ist. Z. B. ist der Graph in Abbildung 3.1 semi-Eulersch, da die ‘Ecken’ New Orleans und New York die einzigen Ecken im Graphen mit ungeradem Grad sind. Ein anderes Problem ist es, den entsprechenden offenen Euler-Zug zu bestimmen, also z. B. von New Orleans nach New York zu fliegen und jede der Strecken genau einmal zu benutzen. Man beachte, dass es sehr wohl erlaubt ist, in einen Ort zwischenzeitlich zurück zu kommen. Z. B. ist durch

(N.O,C),(C,N.Y),(N.Y,L.A),(L.A,D),(D,S.F),(S.F,L.A),(L.A,C),(C,T),(T,N.Y)

ein offener Euler-Zug von New Orleans nach New York im Graphen gefunden.

Ein ähnliches, aber wesentlich schwierigeres Problem ist es, in einem Graphen  $G = (V, E)$  einen *Hamilton-Kreis* zu finden. Unter einem *Weg* in einem Graphen versteht man eine Folge von paarweise verschiedenen Ecken  $x_1, \dots, x_n \in V$ , wobei  $(x_i, x_{i+1}) \in E$ ,  $i = 1, \dots, n - 1$ . Dieser heißt ein geschlossener Weg oder ein *Kreis*, wenn darüberhinaus  $(x_n, x_1) \in E$ . Ein Kreis, der jede Ecke im Graphen genau einmal enthält, heißt ein *Hamilton-Kreis*. Wenn in einem Graphen ein Hamilton-Kreis existiert, so heißt er ein *Hamilton-Graph*. Man beachte den Unterschied zwischen einem Kreis und einem geschlossenen Kantenzug. Jeder Kreis ist ein geschlossener Kantenzug, aber nicht jeder geschlossene Kantenzug ist ein Kreis (Beispiel?).

**Beispiel:** Im Jahre 1859 stellte Sir William Hamilton das Problem, ob der in Abbildung 3.2 dargestellte Graph ein Hamilton-Graph ist (natürlich nannte er selber

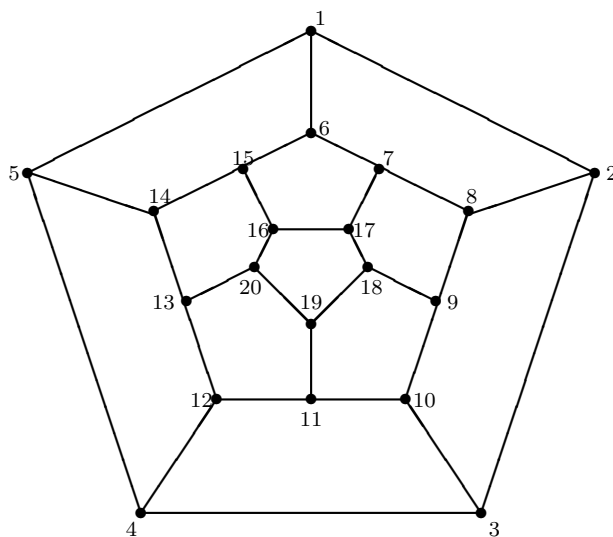


Abbildung 3.2: Ist dieser Graph Hamiltonsch?

ihn so nicht). Wie man bei J. M. ALDOUS, R. J. WILSON (2000, S. 71)<sup>2</sup> nachlesen kann, machte Hamilton aus dem Problem ein Spiel, in dem der Spieler einen

<sup>2</sup>J. M. ALDOUS, R. J. WILSON (2000) *Graphs and Applications. An Introductory Approach*. Springer, London-Berlin-Heidelberg.

Hamilton-Kreis zu finden hatte, wenn der Anfang des Kreises vorgegeben ist. Übrigens haben wir dieses Bild (den sogenannten Dodekaeder-Graphen) mühsam mit dem picture-environment hergestellt. In Maple müsste dies dank des network-packages, in dem man durch `G:=dodecahedron()`; den Dodekaeder-Graphen direkt definieren kann, eigentlich auch möglich sein. Aber wie? Einen Hamilton-Kreis geben wir in Abbildung 3.3 an. In dem mathematischen Anwendersystem Mathematica kann man durch

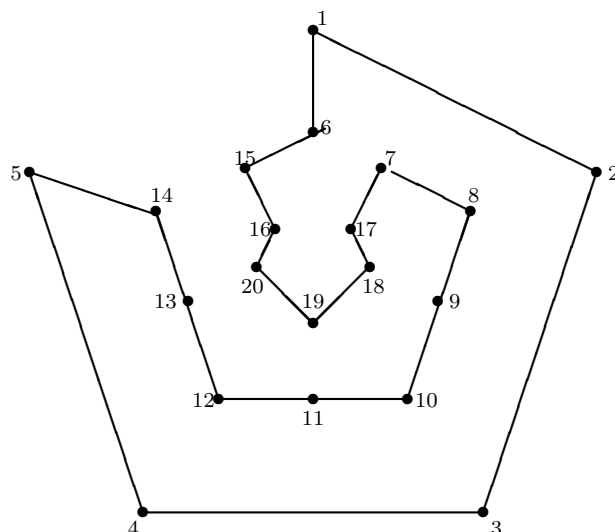


Abbildung 3.3: Ein Hamilton-Kreis zum Graphen in Abbildung 3.2

«DiscreteMath‘Combinatorica‘ ein mächtiges Zusatzpaket laden, mit welchem es z. B. möglich ist festzustellen, ob ein gegebener Graph ein Hamilton-Graph ist und eventuell einen Hamilton-Kreis auszugeben. Den obigen Hamiltonkreis haben wir z. B. so erhalten.  $\square$

**Beispiel:** Beim Problem des Rösselsprungs (engl.: knight problem) geht es um folgendes: Mit dem Springer sollen alle  $n^2$  Felder eines  $n \times n$ -Bretts genau einmal in einem kontinuierlichen Zug erreicht und zum Ausgangsfeld zurückgekehrt werden. Die  $n^2$  Felder des Schachbretts seien die Ecken eines Graphen. Weiter sind zwei Ecken genau dann durch eine Kante verbunden, wenn zwischen den entsprechenden Feldern ein Rösselsprung möglich ist. Das Rösselsprungproblem ist dann offenbar äquivalent dazu, in dem definierten Graphen einen Hamilton-Kreis zu bestimmen oder zu entscheiden, dass es so einen nicht gibt. Dies ist z. B. für  $n = 4$  der Fall, siehe eine Aufgabe in der Einführung. Bei L. VOLKMANN (1991)<sup>3</sup> ist eine auf Euler (1759) zurückgehende Lösung für  $n := 8$  angegeben, die wir in Tabelle 3.1 links reproduzieren: In Abbildung 3.4 ist diese Lösung als Hamilton-Kreis in einem Graphen veranschaulicht. Noch erstaunlicher ist ein Springerkreis, der gleichzeitig ein magisches Quadrat ist (alle Zeilen- und Spaltensummen ergeben 260). Man findet ihn bei M. LÖBBING, I. WEGENER (1996)<sup>4</sup>. Er ist oben rechts angegeben. Bei Löbbing-Wegener findet man weitere inter-

<sup>3</sup>L. VOLKMANN (1991) *Graphen und Digraphen. Eine Einführung in die Graphentheorie*. Springer, Wien-New York.

<sup>4</sup>M. LÖBBING, I. WEGENER (1996) “Knight moves—was macht der Springer allein auf dem Schach-

58	43	60	37	52	41	62	35
49	46	57	42	61	36	53	40
44	59	48	51	38	55	34	63
47	50	45	56	33	64	39	54
22	7	32	1	24	13	18	15
31	2	23	6	19	16	27	12
8	21	4	29	10	25	14	17
3	30	9	20	5	28	11	26

63	22	15	40	1	42	59	18
14	39	64	21	60	17	2	43
37	62	23	16	41	4	19	58
24	13	38	61	20	57	44	3
11	36	25	52	29	46	5	56
26	51	12	33	8	55	30	45
35	10	49	28	53	32	47	6
50	27	34	9	48	7	54	31

Tabelle 3.1: Zwei Lösungen des Rösselsprungproblems

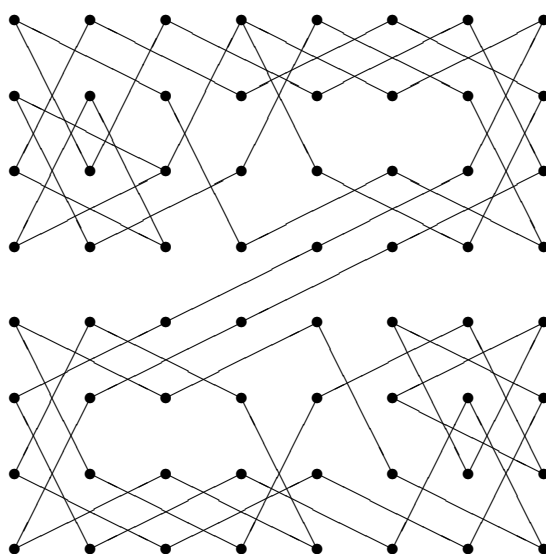


Abbildung 3.4: Eine Lösung des Rösselsprungproblems

essante Bemerkungen zum Problem der Springerkreise, z. B. dass dieses in einer Folge von “Wetten, daß. . .?” schon eine Rolle spielte. Man kann dort nachlesen:

- Der Kandidat behauptete, dass er für ein beliebiges Feld den Springer so über das Schachbrett bewegen kann, dass jedes Feld genau einmal erreicht wird. Und der Kandidat hat die Wette gewonnen. Diese Leistung hat bei vielen Menschen Bewunderung hervorgerufen. Immerhin gibt es 64 Startfelder, und 64 Springerwege enthalten 4032 Springerzüge. Diese Vorgehensweise ist jedoch sträflich naiv. Es genügt doch, einen Springerkreis auswendig zu lernen, da jeder Springerkreis für jedes Startfeld einen Springerweg enthält. Diese Gedächtnisleistung wird noch geringer, wenn ein Springerkreis mit vielen Symmetrien gewählt wird.

Bemerkt sei, dass erst sehr kürzlich (im Februar oder März 2003) eine solche Wette wieder in der Sendung “Wetten, dass. . .” vorkam und ein neunjähriger Junge mit

brett?” In: Highlights aus der Informatik (I. Wegener, Hrsg.). Springer, Berlin-Heidelberg-New York.

verbundenen Augen von einer vorgegebenen Startecke einen Hamilton-Kreis angeben konnte.  $\square$

**Beispiel:** Man betrachte (siehe J. M. ALDOUS, R. J. WILSON (2000, S. 63)) die vier Graphen in Abbildung 3.5. Welcher davon ist Eulersch, welcher ein Hamilton-Graph?

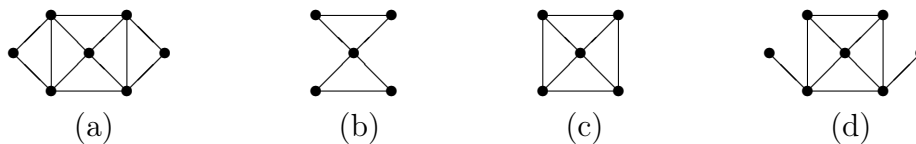


Abbildung 3.5: Welcher Graph ist Eulersch, welcher ein Hamilton-Graph?

Offenbar ist (a) ein Euler-Graph und ein Hamilton-Graph, (b) ist Eulersch aber kein Hamilton-Graph, (c) ist ein Hamilton-Graph, aber kein Euler-Graph (ist auch nicht semi-Eulersch), schließlich ist (d) keins von beidem.  $\square$

Hamiltonsche Kreise treten in natürlicher Weise beim Traveling Salesman Problem, dem Problem des Handlungsreisenden, auf. Wir werden auf dieses berühmte Problem später zurückkommen.

### 3.1.2 Eulersche Graphen

In diesem Unterabschnitt wollen wir die schon in der Einführung genannten notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass ein Graph Eulersch bzw. semi-Eulersch ist, beweisen. Zunächst formulieren und beweisen wir einen Hilfssatz, danach folgt das eigentliche Ergebnis..

**Lemma 1.1** *Die Kantenmenge eines Graphen kann genau dann in Kreise partitioniert werden, wenn jede Ecke geraden Grad besitzt. Insbesondere gilt: Hat jede Ecke in einem Graphen geraden Grad, so ist jede Ecke in einem Kreis enthalten.*

**Beweis:** Zunächst nehmen wir an, die Kantenmenge eines Graphen sei die disjunkte Vereinigung von Kreisen. Eine beliebige Ecke des Graphen ist entweder isoliert (dann hat sie den Grad 0) oder es führen Kanten zu ihr hin und von ihr fort. Ist die Ecke also in  $k$  Kreisen enthalten, so hat sie die Ordnung  $2k$ , und diese ist gerade.

Umgekehrt nehmen wir nun an, jede Ecke des Graphen habe geraden Grad. Außerdem können wir natürlich annehmen, dass nicht alle Ecken isoliert sind, es also überhaupt Kanten im Graphen gibt. Wie kann man einen Kreis im Graphen finden? Sei  $x_0x_1 \dots x_l$  ein Weg maximaler Länge  $l$  (gleich Anzahl der Kanten) im Graphen. Da  $x_0$  nicht isoliert ist und geraden Grad besitzt, hat  $x_0$  außer  $x_1$  noch einen weiteren Nachbarn, etwa  $y$ . Es ist  $y = x_i$  für ein  $i \in \{2, \dots, l\}$ , denn andernfalls wäre  $yx_0 \dots x_l$  ein Weg der Länge  $l + 1$ . Damit hat man wenigstens einen Kreis gefunden, nämlich  $x_0x_1 \dots x_i$ . Nun entferne man aus dem Graphen alle Kanten des gerade gefundenen Kreises und wende auf den so entstandenen Graphen (in diesem haben wieder alle Ecken geraden Grad) dieselbe Argumentation an. Nach endlich vielen Schritten ist die Behauptung bewiesen.  $\square$

**Satz 1.2** Ein Graph  $G = (V, E)$  mit keinen isolierten Ecken<sup>5</sup> und  $E \neq \emptyset$  ist genau dann Eulersch, wenn  $G$  zusammenhängend ist und alle Ecken geraden Grad haben.

**Beweis:** Sei  $G$  ein Eulerscher Graph ohne isolierte Ecken. Dann ist  $G$  zusammenhängend, denn in einem Euler-Zug kommt jede Kante und daher jede Ecke vor. Da der Euler-Zug jede Ecke über eine gewisse Kante erreicht und über eine andere wieder verlässt, hat jede Ecke geraden Grad.

Umgekehrt nehmen wir an,  $G$  sei zusammenhängend und jede Ecke habe geraden Grad. Nach Lemma 1.1 gibt es in  $G$  wenigstens einen Kreis und damit einen geschlossenen Kantenzug. Sei  $C$  ein geschlossener Kantenzug mit einer maximalen Anzahl von Kanten, diese seien in  $E(C) \subset E$  zusammengefasst. Ist  $E = E(C)$ , so ist man fertig, denn dann ist  $C$  ein (geschlossener) Euler-Zug. Andernfalls sei  $G' := (V, E \setminus E(C))$ . Da  $G$  zusammenhängend ist, gibt es eine Ecke  $u$  auf  $C$ , die mit einer Kante aus  $G'$  inzidiert. In  $G'$  hat wieder jede Ecke geraden Grad. Daher gibt es einen geschlossenen Kantenzug  $C'$  in  $G'$ , der  $u$  enthält. Schiebt man  $C'$  beim Durchlaufen von  $C$  an der Stelle  $u$  ein, so erhält man einen Widerspruch zur Maximalität von  $C$ .  $\square$

**Beispiele:** In Abbildung 1.7 erkennt man, dass die Ecken  $A, B, C, D$  jeweils ungeraden Grad, nämlich 5, 3, 3, 3, besitzen, daher ist der Graph nicht Eulersch bzw. ein Spaziergang durch Königsberg, bei dem jede der 7 Brücken genau einmal überquert wird, nicht möglich. Dagegen ist das in Abbildung 3.6 angegebene erweiterte Haus des Nikolaus ein Eulerscher Graph. Denn der Grad jeder Ecke in dem Graphen ist 2 oder 4.

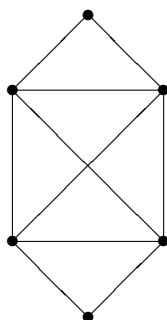


Abbildung 3.6: Das (erweiterte) Haus des Nikolaus

Im nächsten Satz werden Bedingungen dafür angegeben, dass ein offener Euler-Zug von einer Ecke  $x$  zu einer Ecke  $y \neq x$  existiert. In Abbildung 1.5 konnten wir für das Haus des Nikolaus einen offenen Euler-Zug von der Ecke 1 zur Ecke 2 eintragen. Wie wir sehen werden, liegt das daran, dass die Ecken 1 und 2 die beiden einzigen Ecken mit ungeradem Grad sind.

**Satz 1.3** Sei  $G = (V, E)$  zusammenhängend. Dann existiert genau dann von der Ecke  $x \in V$  ein offener Euler-Zug zu der Ecke  $y \in V \setminus \{x\}$ , wenn  $x$  und  $y$  die einzigen Ecken mit ungeradem Grad sind.

<sup>5</sup>Eine Ecke  $x \in V$  heißt *isoliert*, wenn sie mit keiner Kante *inzidiert*, also  $(x, y) \notin E$  für alle  $y \in V$ .

**Beweis:** Seien  $x$  und  $y$  die beiden einzigen Ecken im Graphen mit ungeradem Grad. Man definiere  $G^* := (V \cup \{u\}, E \cup \{ux\} \cup \{uy\})$ , wobei  $u \notin V$ . Dann ist  $G^*$  zusammenhängend, ferner besitzen alle Ecken in  $G^*$  (also auch  $x, y$  und  $u$ ) geraden Grad. Daher gibt es wegen des gerade ebenen bewiesenen Satz 1.2 in  $G^*$  einen Euler-Zug  $C^*$ . Lässt man in diesem Euler-Zug die Ecke  $u$  und die inzidierenden Kanten  $ux$  und  $uy$  fort, so erhält man einen offenen Euler-Zug von  $x$  nach  $y$ . Umgekehrt gebe es einen offenen Euler-Zug von  $x$  nach  $y \neq x$ . Da in jeder anderen Ecke außer  $x, y$  ebenso viele Kanten anfangen wie enden, ist der Grad einer jeden solchen Ecke gerade. Aus dem entsprechenden Grund ist der Grad von  $x$  und  $y$  ungerade.  $\square$

**Bemerkung:** Wir wollen noch einmal bemerken, dass die beiden letzten Sätze entsprechend auch für Multigraphen gelten. Auch eine Übertragung auf *gerichtete Multigraphen* (hier sind die Kanten gerichtet, naheliegenderweise spricht man häufig statt von (gerichteten) Kanten auch von *Pfeilen*) ist leicht möglich. Hier muss man für eine Ecke  $x$  zwischen dem In-Grad  $d^+(x)$  (Anzahl der bei  $x$  startenden Pfeile) und dem Aus-Grad  $d^-(x)$  (Anzahl der bei  $x$  endenden Pfeile) unterscheiden. Man kann dann z. B. zeigen, dass ein zusammenhängender gerichteter Graph genau dann einen (gerichteten) Euler-Zug besitzt, wenn  $d^-(x) = d^+(x)$  für alle Ecken  $x$ . Man versuche, die entsprechenden Aussagen zu präzisieren und zu beweisen.  $\square$

**Beispiel:** Wir wollen *Mathematica* benutzen, um im erweiterten Haus des Nikolaus einen Euler-Zug zu bestimmen. Zunächst erhält man durch

```
<<DiscreteMath`Combinatorica`
adjdata={{2,6},{1,3,5,6},{2,4,5,6},{3,5},{2,3,4,6},{1,2,3,5}};
gr=FromAdjacencyLists[adjdata];
ShowLabeledGraph[gr]
```

den in Abbildung 3.7 angegebenen Graphen. Dieser Graph ist Eulersch, da man auf

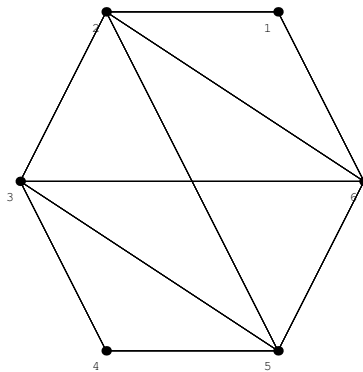


Abbildung 3.7: Das (erweiterte) Haus des Nikolaus

`EulerianQ[gr]` die Antwort `True` erhält, was wegen Satz 1.2 auch kein Wunder ist, da `ConnectedQ[gr]` ebenfalls die Antwort `True` ergibt und `DegreeSequence[gr]` den Output  $\{4, 4, 4, 2, 2\}$  zur Folge hat, also anzeigt, dass jede Ecke geraden Grad besitzt. Nach `EulerianCycle[gr]` ergibt sich  $\{4, 5, 6, 3, 5, 2, 6, 1, 2, 3, 4\}$  als eine Euler-Tour.  $\square$



### 3.1.3 Hamilton-Kreise

Es ist einfach zu entscheiden, ob ein Graph Eulersch ist. Dagegen ist keine notwendige und hinreichende Bedingung dafür bekannt, dass ein Graph Hamiltonsch ist. Gewisse Klassen von Hamilton-Graphen sind einfach anzugeben. Z. B. ist der vollständige Graph  $K_n$  mit  $n$  Ecken, bei dem je zwei Ecken durch eine Kante verbunden sind, für  $n \geq 3$  offensichtlich ein Hamilton-Graph. In Abbildung 3.8 links geben wir  $K_{17}$  an. Dies haben

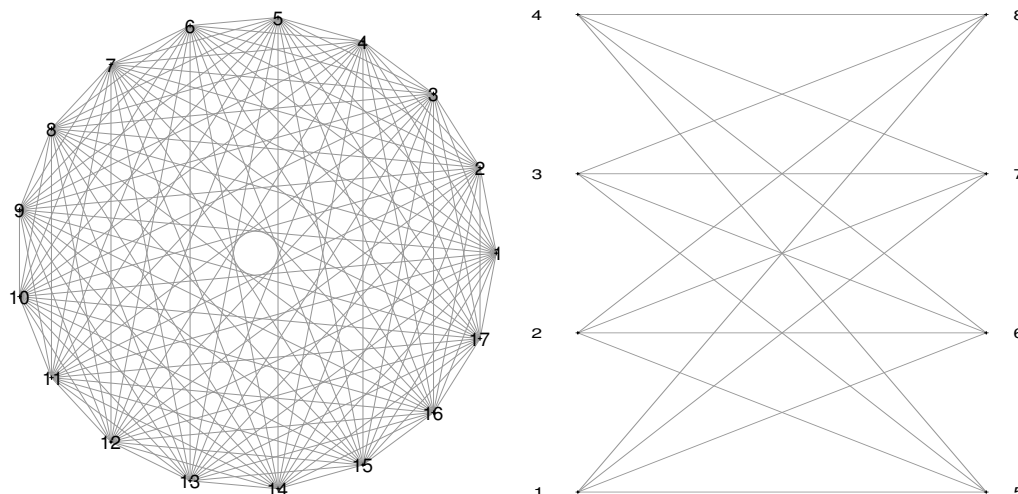


Abbildung 3.8:  $K_{17}$  und  $K_{4,4}$

wir in Maple erreicht durch

```
with(networks):
G:=complete(17):
S:=draw(G):
with(plots):
display([S],scaling=constrained);
```

Weiter heißt ein Graph *bipartit*, wenn die Menge der Ecken  $V$  disjunkte Vereinigung von zwei Mengen  $U$  und  $W$  ist und jede Kante eine Ecke in  $U$  und eine in  $W$  besitzt. Bipartite Graphen treten z. B. beim Transportproblem auf, wo die Menge der Ecken die disjunkte Vereinigung der “Lagerecken” und der “Kundenecken” ist und ein Transport stets von einem Lager zu einem Kunden erfolgt. Man spricht von einem *vollständigen bipartiten Graphen*, wenn alle Kanten zwischen  $U$  und  $W$  vorhanden sind. Ist  $|U| = m$  und  $|W| = n$ , so wird er mit  $K_{m,n}$  bezeichnet. Der  $K_{4,4}$  ist in Abbildung 3.8 rechts angegeben, auch dies ist ein Hamilton-Graph.

Eine sehr spezielle hinreichende Bedingung dafür, dass ein Graph Hamiltonsch ist, gibt der folgende Satz an.

**Satz 1.4** Sei  $G = (V, E)$  ein zusammenhängender Graph mit  $n := |V| \geq 3$  Ecken. Der Grad jeder Ecke sei mindestens  $\frac{1}{2}n$ . Dann ist  $G$  ein Hamilton-Graph.

**Beweis:** Wir nehmen an, der Satz sei nicht wahr. Für ein gewisses  $n$  sei  $G$  also ein Graph mit  $n$  Ecken, deren Grad mindestens  $n/2$  ist und der nicht Hamiltonsch ist.

Wir können annehmen, dass  $G$  maximal viele Kanten besitzt, das Hinzufügen auch nur einer Kante zweier vorher nicht benachbarter Knoten (solche muss es geben, denn andernfalls wäre der Graph vollständig und damit Hamiltonsch) führe also auf einen Hamiltonschen Graphen. Seien  $y$  und  $z$  zwei nicht benachbarte Ecken. Da Hinzufügen von  $yz$  zur Existenz eines Hamiltonschen Kreises führt, gibt es einen Weg  $x_1x_2 \cdots x_n$  in  $G$  von  $y = x_1$  nach  $z = x_n$ . Die Mengen

$$\{i \in \{1, \dots, n-1\} : y \text{ ist benachbart zu } x_{i+1}\}$$

und

$$\{i \in \{1, \dots, n-1\} : z \text{ ist benachbart zu } x_i\}$$

enthalten beide mindestens  $n/2$  Elemente. Da beide in der  $n-1$  Elemente enthaltenden Menge  $\{1, \dots, n-1\}$  enthalten sind, gibt es ein  $i_0 \in \{1, \dots, n-1\}$ , welches in beiden Mengen enthalten sind. Dann wäre aber

$$y = x_1x_2 \cdots x_{i_0}z = x_nx_{n-1} \cdots x_{i_0+1}x_1 = y$$

ein Kreis durch alle  $n$  Ecken von  $G$ , ein Widerspruch dazu, dass durch  $G$  ein Gegenbeispiel gegeben ist.  $\square$

Wie schon früher angedeutet wurde, spielen Hamilton-Kreise beim Traveling<sup>6</sup> Salesman Problem (TSP) eine wichtige Rolle. Das TSP besteht in folgendem: Ein Handlungsreisender hat  $n$  Städte zu besuchen. Bekannt sind die Reisekosten  $c_{ij} \geq 0$  zwischen zwei Städten  $i$  und  $j$  (wobei nicht notwendig  $c_{ij} = c_{ji}$ , wenn das der Fall ist, so spricht man vom symmetrischen TSP). Gesucht ist eine Rundtour, d. h. eine Tour, die zum Ausgangspunkt zurückführt und keine Stadt (außer natürlich der Ausgangsstadt) zweimal berührt, mit minimalen Kosten. Da ein Verweilen in der Stadt  $i$  verboten ist, sei  $c_{ii} = +\infty$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Die Menge der zulässigen Lösungen des TSP ist die Menge aller zyklischen Permutationen von  $\{1, \dots, n\}$ , also der Permutationen ohne Unterzyklen (wodurch die vorzeitige Rückkehr in eine schon besuchte Stadt verhindert wird). Eine äquivalente graphentheoretische Formulierung ist die folgende: Gegeben sei der vollständige Graph  $K_n$ , die Kanten  $(i, j)$  tragen Kosten  $c_{ij}$  (man spricht dann von einem gewichteten Graphen). Gesucht ist ein Hamilton-Kreis mit minimalen Kosten. Hierbei dürfte klar sein, was unter den Kosten eines Kreises zu verstehen ist. Es ist "sehr schwer", eine optimale Lösung des TSP bei großem  $n$  zu bestimmen. Es gibt einige Heuristiken zur Konstruktion einer kostengünstigen Rundtour. Die einfachste und naheliegendste ist ein Greedy-Algorithmus, bei dem man jeweils die nächste noch nicht besuchte Stadt anfährt. Auf weitere gehen wir später ein, wenn wir etwas mehr Graphentheorie kennen.

### 3.1.4 Aufgaben

1. Man gebe einen Euler-Zug im vollständigen Graphen  $K_5$  an. Ferner begründe man, weshalb  $K_n$  für ungerades  $n$  ein Euler-Graph ist.

<sup>6</sup>Gibt man in der Suchmaschine Google "Travelling Salesman" ein, so erhält man 22 700 Antworten, nach "Traveling Salesman" sind es 67 300. Der Unterschied dürfte daran liegen, dass ersteres die englische, letzteres die amerikanische Schreibweise ist. Wir werden in Zukunft vom TSP sprechen.

2. Man zeige: Kann der Zusammenhang eines Graphen  $G$  durch die Entnahme einer einzigen Ecke und sämtlicher mit dieser Ecke inzidierender Kanten zerstört werden, so ist  $G$  kein Hamiltonscher Graph.
3. Man zeige, dass ein bipartiter Graph mit einer ungeraden Zahl von Ecken nicht Hamiltonsch ist. Hiermit zeige man, dass der in Abbildung 3.9 angegebene Graph nicht

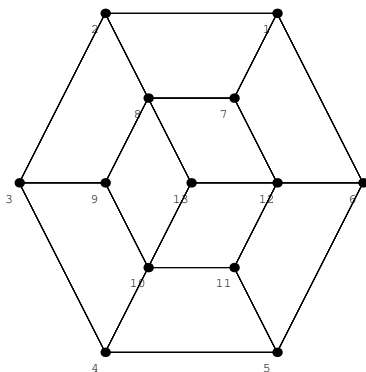


Abbildung 3.9: Bipartiter Graph mit ungerader Eckenzahl

Hamiltonsch ist.

4. Der Graph  $Q_n$ , der sogenannte Hyperwürfel, ist folgendermaßen definiert: Die Eckenmenge  $V_n$  besteht aus allen 0,1-Folgen der Länge  $n$ , offenbar ist  $|V_n| = 2^n$ . Zwei Ecken  $x, y \in V$  werden durch eine Kante  $(x, y)$  verbunden, wenn sich die beiden 0,1-Folgen an genau einer Stelle unterscheiden. Die Kantenmenge von  $Q_n$  wird mit  $E_n$  bezeichnet. Man zeige:
  - (a) Es ist  $|E_n| = n2^{n-1}$ .
  - (b)  $Q_n$  ist bipartit.
  - (c)  $Q_n$  ist für  $n \geq 2$  ein Hamilton-Graph.
5. Gegeben sei ein  $n \times n$ -Schachbrett. Die Felder seien die Ecken eines Graphen. Zwei Ecken sind durch eine Kante verbunden, wenn ein Rösselsprung zwischen ihnen möglich ist. Man zeige, dass für ungerades  $n$  der entsprechende Graph kein Hamilton-Graph ist.  
Hinweis: Man benutze die Aussage von Aufgabe 3, dass nämlich ein bipartiter Graph mit einer ungeraden Zahl von Ecken nicht Hamiltonsch ist.
6. Gegeben sei ein zusammenhängender Graph  $G = (V, E)$ , der genau  $k$  Ecken mit ungeradem Grad besitzt. Man zeige:
  - (a) Es ist  $k$  gerade.
  - (b) Etwas lax formuliert: Die minimale Anzahl der Kantenzüge, mit denen die Kantenmenge  $E$  gezeichnet werden kann, ist  $k/2$ .
  - (c) Gegeben sei der Graph in Abbildung 3.10. Man zeige, dass man die Kantenmenge in vier, aber nicht in drei Zügen zeichnen kann.

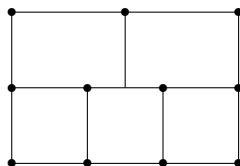


Abbildung 3.10: Wie oft muss man absetzen?

Hinweis: Der erste Teil der Aufgabe ist eine einfache Folgerung aus dem sogenannten *Handshaking Lemma*, das ohne Beweis benutzt werden darf (obwohl dieser einfach ist). Dieses sagt aus:

- Sei  $G = (V, E)$  ein Graph. Dann ist  $\sum_{x \in V} d(x) = 2|E|$ , wobei natürlich  $d(x)$  den Grad einer Ecke  $x \in V$  bedeutet.

Für den zweiten Teil der Aussage füge man  $k/2$  Kanten zu  $G$  so dazu, dass der entstehende Graph Eulersch ist.

## 3.2 Minimale aufspannende Bäume, kürzeste Wege

### 3.2.1 Beispiele

Wir geben nur zwei einfache Beispiele an.

**Beispiel:** In einem gewissen Gebiet soll eine bestimmte Anzahl von Dörfern durch ein Leitungssystem (Strom, Wasser oder Kommunikation können z. B. hierdurch geleitet werden) miteinander verbunden werden. Nicht je zwei Dörfer können aus technischen Gründen verbunden werden. Wenn dies aber möglich ist, sind die (positiven) Kosten der Verbindung bekannt. Gesucht ist nach einem kostenminimalen Leitungssystem, dem alle Dörfer angeschlossen sind, wobei allerdings eine Einschränkung darin besteht, dass das zu bauende Leitungssystem *zusammenhängend* ist.

Wie kann dies graphentheoretisch modelliert werden? Die Dörfer bilden die Ecken eines Graphen. Wenn zwischen zwei Dörfern eine Leitung gebaut werden kann, so werden die beiden Ecken durch eine Kante verbunden<sup>7</sup>. Auf diese Weise gewinnt man einen (zusammenhängenden) Graphen  $G = (V, E)$ . Gegeben ist ferner eine auf den Kanten definierte Kostenfunktion  $f : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ . Unter allen zusammenhängenden Untergraphen  $G' = (V, E')$  (es ist also  $E' \subset E$ ) bestimme man einen mit minimalen Kosten  $f(G') := \sum_{e' \in E'} f(e')$ . Es ist klar, dass in einem optimalen Untergraphen kein Kreis vorkommt (man könnte nämlich eine Kante streichen, ohne den Zusammenhang des Graphen zu verlieren). Wie wir sehr bald sehen werden, suchen wir einen *minimalen,  $G$  aufspannenden Baum*.

Als spezielles Beispiel betrachten wir 5 Dörfer mit der in Abbildung 3.11 angegebenen Kantenbewertung. □

<sup>7</sup>Natürlich müssen wir voraussetzen, dass der hierdurch gewonnene Graph zusammenhängend ist, denn andernfalls kann man nicht durch Weglassen von Kanten zu einem zusammenhängenden Graphen kommen.

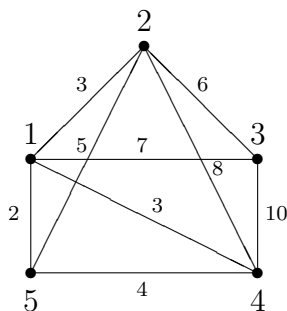


Abbildung 3.11: Was ist der minimale aufspannende Baum?

**Beispiel:** Gewisse Orte sind durch Straßen miteinander verbunden. Jede Straße hat eine gewisse Länge. Die Aufgabe besteht darin, einen kürzesten Weg zwischen zwei vorgegebenen Orten zu finden, wobei die Länge des Weges die Summe der Länge der dabei benutzten Straßen ist.

Die graphentheoretische Modellierung ist offensichtlich. Die Orte bilden die Ecken in einem Graphen. Gibt es zwischen zwei Orten eine Straße, so sind die beiden entsprechenden Ecken durch eine Kante verbunden. Hierdurch gewinnt man einen Graphen  $G = (V, E)$ . Gegeben ist ferner eine nichtnegative Gewichtsfunktion auf der Kantenmenge  $E$ , also  $f : E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ . Für  $x, y \in V$  sei  $P = P(x, y)$  ein  $x$  und  $y$  verbindender Weg und  $E(P)$  die dabei (als Verbindung der paarweise verschiedenen Ecken) auftretenden Kanten. Mit  $l(P) := \sum_{e \in E(P)} f(e)$  wird die zugehörige (gewichtete) Länge des Weges  $P$  bezeichnet. Unter allen  $x$  und  $y$  verbindenden Wegen will man nun einen mit minimaler Länge, also einen *kürzesten Weg* bestimmen.  $\square$

### 3.2.2 Bäume, minimale aufspannende Bäume

Ein Graph, der keinen Kreis enthält, heißt ein *Wald*. Ein zusammenhängender Wald heißt ein *Baum*. Ist  $G = (V, E)$  ein zusammenhängender Graph, so heißt ein Untergraph  $G' = (V, E')$  (dieselbe Eckenmenge wie  $G$  und eine Kantenmenge  $E' \subset E$ ), der ein Baum ist, ein (den Graphen  $G$ ) aufspannender Baum (spanning tree). Offenbar besitzt jeder zusammenhängende Graph  $G$  (mindestens) einen aufspannenden Baum. Entweder ist  $G$  bereits ein Baum, dann sind wir fertig, oder  $G$  besitzt einen Kreis  $C$ . Entfernen wir aus  $C$  eine beliebige Kante  $e$ , so ist  $G_1 = (V, E \setminus \{e\})$  nach wie vor zusammenhängend. Auf  $G_1$  kann dasselbe Verfahren angewandt werden und nach endlich vielen Schritten erhält man einen aufspannenden Baum.

Im folgenden Satz werden notwendige und hinreichende Bedingungen dafür angegeben, dass ein Graph ein Baum ist.

**Satz 2.1** Sei  $G = (V, E)$  ein Graph. Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:

1.  $G$  ist ein Baum.
2. Je zwei Ecken in  $G$  sind durch genau einen Weg verbunden.
3.  $G$  ist zusammenhängend und es gilt  $|E| = |V| - 1$ .

**Beweis:** Sei  $G$  ein Baum, insbesondere also zusammenhängend. Zwei beliebige Ecken  $x, y \in V$  können durch mindestens einen Weg verbunden werden. Würde es zwei Wege von  $x$  nach  $y$  geben, so hätte man einen Kreis, was in einem Baum nicht möglich ist. Sind umgekehrt je zwei Ecken in  $G$  durch genau einen Weg verbunden, so ist  $G$  insbesondere zusammenhängend. Gäbe es in  $G$  einen Kreis, so sind je zwei Ecken dieses Kreises durch zwei verschiedene Wege verbunden. Damit ist die Äquivalenz der ersten beiden Aussagen bewiesen.

Wir nehmen an,  $G = (V, E)$  sei ein Baum. Dann ist  $G$  insbesondere zusammenhängend und es bleibt zu zeigen, dass  $|E| = |V| - 1$ . Hierzu überlegen wir uns, dass es in einem Baum Ecken vom Grad 1 gibt. Ist nämlich  $P = x, x_1, \dots, y$  ein längster Weg in  $G$ , so sind alle Nachbarn von  $x$  (und von  $y$ ) in  $P$ , also  $d(x) = d(y) = 1$  (andernfalls könnte der Weg verlängert werden, da  $G$  keinen Kreis enthält). Man setze  $G_1 := (V_1, E_1) := (V \setminus \{x\}, E \setminus \{xx_1\})$ . Dann ist auch  $G_1$  ein Baum und  $|V_1| - |E_1| = |V| - |E|$ . Nach  $n-2$  Schritten (hierbei bezeichne  $n := |V|$  die Ordnung von  $G$ ) erhalten wir einen Baum  $G_{n-2} = (V_{n-2}, E_{n-2})$  auf 2 Ecken, d. h. es ist  $G_{n-2} = K_2$  und es gilt  $|V| - |E| = |V_{n-2}| - |E_{n-2}| = 1$ . Umgekehrt sei  $G = (V, E)$  ein zusammenhängender Graph mit  $|V| = |E| - 1$ . Sei  $T$  ein aufspannender Baum von  $G$ . Wegen  $V(T) = V(G)$  und  $E(T) \subset E(G)$  ist

$$1 = |V(G)| - |E(G)| \leq |V(T)| - |E(T)| = 1,$$

wobei wir für die letzte Gleichung die gerade eben bewiesene Aussage auf  $T$  anwenden. Folglich ist  $|E(T)| = |E(G)|$  und daher  $G = T$  selbst schon ein Baum.  $\square$

Zur Bestimmung eines minimalen  $G = (V, E)$  aufspannenden Baumes  $T' = (V, E')$  geben wir den folgenden Algorithmus an:

1. Sei  $E' := \emptyset$ ,  $F := E$ .
2. Bestimme  $e' \in F$  mit  $f(e') = \min_{e \in F} f(e)$ . Setze  $F := F \setminus \{e'\}$ .
3. Besitzt der Graph  $(V, E' \cup \{e'\})$  einen Kreis, so gehe zu 2.
4. Besitzt der Graph  $(V, E' \cup \{e'\})$  keinen Kreis, so setze  $E' := E' \cup \{e'\}$ . Ist  $|E'| = |V| - 1$ , dann STOP, andernfalls gehe zu 2.

Zunächst bestimme man also die kürzeste Kante, d. h. diejenige mit der niedrigsten Bewertung. Jede danach zu wählende Kante wird als eine kürzeste unter den verbleibenden Kanten gewählt, es sei denn, man würde dadurch einen Kreis erzeugen. Der Prozess endet, wenn man keine Kante hinzufügen kann, ohne einen Kreis zu erzeugen. Dies ist der Fall, wenn  $|V| - 1$  Kanten hinzugefügt sind<sup>8</sup>. Man nennt diesen Algorithmus einen *Greedy-Algorithmus* (greedy=gefräßig), weil in jedem Schritt die zu dieser Zeit lokal beste Möglichkeit ausgewählt wird.

Wir wollen uns das Verfahren an dem Graphen in Abbildung 3.11 klar machen. Die einzelnen Schritte findet man in Abbildung 3.12. Im letzten Schritt haben wir nicht die

<sup>8</sup>Jeder Graph  $G = (V, E)$  mit  $|E| \geq |V|$  enthält einen Kreis. Denn angenommen, das wäre nicht der Fall. Dann wäre  $G$  ein Wald und seine Zusammenhangskomponenten daher Bäume. Ist  $t$  die Anzahl der Zusammenhangskomponenten von  $G$ , so  $|E| = |V| - t < |V|$ , ein Widerspruch.

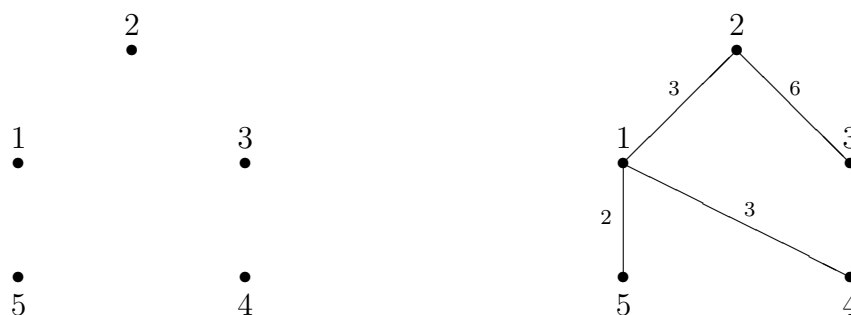


Abbildung 3.12: Konstruktion des minimalen aufspannenden Baumes

Kante 54 mit der Bewertung 4 wählen dürfen, weil wir dann den Kreis (genauer ein Dreieck) 145 erzeugt hätten. Insgesamt haben wir einen  $G$  aufspannenden Baum der Länge 14 erzeugt.

Nun kann man beweisen (gar nicht so ganz einfach!)<sup>9</sup>:

**Satz 2.2** *Der durch den obigen Algorithmus (Verfahren von Kruskal) zum zusammenhängenden Graphen  $G = (V, E)$  erzeugte Graph  $T' = (V, E')$  ist ein minimaler  $G$  aufspannender Baum.*

**Beweis:** Nach Konstruktion ist  $T' = (V, E')$  ein maximaler kreisfreier Untergraph von  $G$  und als solcher ein  $G$  aufspannender Baum, wenn noch gezeigt werden kann, dass  $T'$  zusammenhängend ist. Seien  $x, y \in V$  zwei beliebige Ecken. Wir wollen zeigen, dass man auf einem Weg in  $T'$ , der also nur Kanten aus  $E'$  enthält, von  $x$  nach  $y$  kommen kann. Da  $G$  als zusammenhängend vorausgesetzt wurde, gibt es in  $G$  einen Weg von  $x$  nach  $y$ , etwa  $xz_1 \cdots z_k y$ . Mit  $z_0 := x, z_{k+1} := y$  ist also  $z_i z_{i+1} \in E, i = 0, \dots, k$ . Es genügt zu zeigen, dass man von  $z_i$  nach  $z_{i+1}$  auf einem Weg in  $T'$  gelangen kann,  $i = 0, \dots, k$ . Ist  $z_i z_{i+1} \in E'$ , so ist dies trivialerweise der Fall. Ist dagegen  $z_i z_{i+1} \notin E'$ , so existiert in  $(V, E' \cup \{z_i z_{i+1}\})$  ein Kreis, was impliziert, dass man auch in diesem Fall von  $z_i$  nach  $z_{i+1}$  über Kanten aus  $E'$  kommen kann. Insgesamt gibt es also von  $x$  nach  $y$  einen Weg in  $T'$ , d. h.  $T'$  ist zusammenhängend.

Nachdem wir nun gezeigt haben, dass der Kruskal-Algorithmus mit einem  $G$  aufspannenden Baum  $T'$  endet, wollen wir zeigen, dass  $T'$  ein *minimaler*  $G$  aufspannender Baum ist. Hierzu nehmen wir an,  $T^* = (V, E^*)$  sei ein minimaler  $G$  aufspannender Baum, der maximal viele Kanten mit  $T' = (V, E')$  gemeinsam hat. Wir werden die Annahme  $E' \neq E^*$  zum Widerspruch führen. Die Kanten in  $E'$  werden Schritt für Schritt bestimmt. Da wir  $E' \neq E^*$  annehmen, gibt es eine erste Kante  $xy$  in  $E'$ , die keine Kante in  $E^*$  ist. In  $T^*$  gibt es genau einen Weg  $P$  von  $x$  nach  $y$  (wegen des Zusammenhangs von  $T^*$  ist die Existenz eines Weges klar, die Eindeutigkeit folgt wegen der Kreisfreiheit von  $T^*$ ). Es gibt wenigstens eine Kante in  $P$ , die nicht zu  $E'$  gehört, denn andernfalls gibt es einen Kreis in  $T'$  (da  $xy \in E'$ ). Sei etwa  $uv$  eine solche Kante. Wir überlegen uns, dass  $f(xy) \leq f(uv)$ . Dies ist sicherlich richtig, wenn man sich überlegt, dass zu dem Zeitpunkt, als  $xy$  als Kante gewählt wurde, auch durch Hinzufügen der

<sup>9</sup>Siehe z. B.

Kante  $uv$  kein Kreis entstanden wäre. Denn alle Kanten, die vor  $xy$  erzeugt sind, liegen in  $T^*$ . Wenn also durch Hinzufügen von  $uv \in E^*$  ein Kreis entstanden wäre, so hätte man einen Widerspruch zur Kreisfreiheit von  $T^*$ . Also ist  $f(xy) \leq f(uv)$ . Definiert man  $T := (V, (E^* \setminus \{uv\}) \cup \{xy\})$ , so ist  $T$  ein  $G$  aufspannender Baum (denn  $T$  ist zusammenhängend, da es einen Weg von  $u$  nach  $v$  in  $T$  gibt, ferner gibt es auch in  $T$  keinen Kreis) mit

$$f(T) = f(T^*) - f(uv) + f(xy) \leq f(T^*).$$

Da  $T^*$  ein kürzester aufspannender Baum ist, ist es auch  $T$ . Da  $T$  mehr Kanten mit  $T'$  gemein hat als  $T^*$ , haben wir einen Widerspruch zur Wahl von  $T^*$  erhalten. Folglich ist  $E' = E^*$  bzw.  $T' = T^*$ , also auch  $T'$  ein minimaler aufspannender Baum.  $\square$

**Beispiel:** Wir wollen untersuchen, welche Hilfsmittel Maple bereitstellt, um minimale aufspannende Bäume zu bestimmen. Wir kehren zu dem Beispiel aus Abbildung 3.11 zurück. Zunächst muss man das `networks` package laden, dann muss man den gewichteten Graphen definieren und schließlich den minimalen aufspannenden Baum berechnen. Dies kann folgendermaßen geschehen:

```
with(networks): new(G):
addvertex({1,2,3,4,5},G):
addedge([ {1,2}, {1,3}, {1,4}, {1,5}, {2,3}, {2,4}, {2,5}, {3,4}, {4,5} ],
weight=[3,7,3,2,6,8,5,10,4],G):
T:=spantree(G,1,w):
```

Durch `draw(G)`; bzw. `draw(T)`; kann man den Graphen bzw. den minimalen aufspannenden Baum zeichnen, siehe Abbildung 3.13 (leider ist mir unklar, wie man die

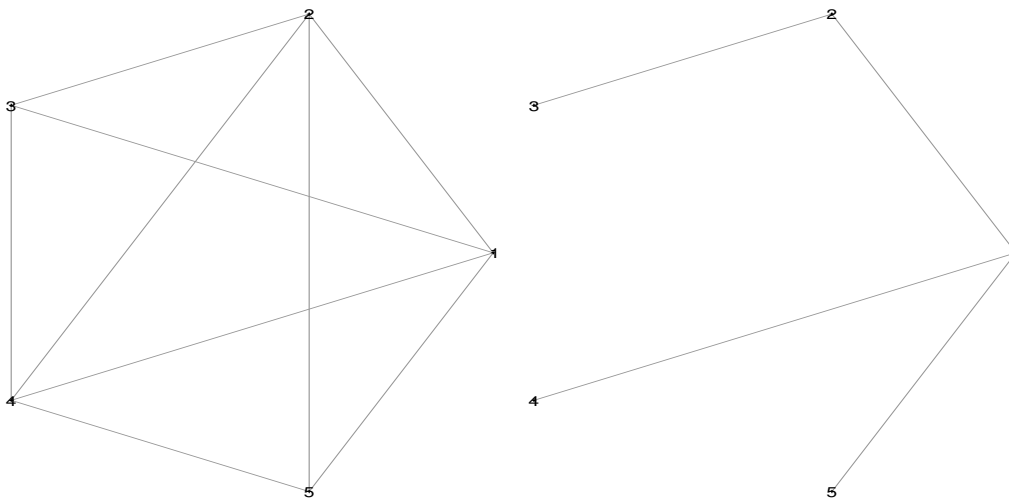


Abbildung 3.13: Ein minimaler aufspannender Baum

Gewichte längs der Kanten beim `draw`-Befehl berücksichtigt). Der Wert der Variablen  $w$  ist das minimale Gewicht, in unserem Fall ist  $w = 14$ . Der zweite Parameter in `spantree` gibt die Wurzel (der Name spricht fast für sich) des aufspannenden Baumes an.  $\square$



Minimale aufspannende Bäume spielen auch eine Rolle, um eine Näherung beim TSP zu gewinnen. Wir gehen kurz auf die *Minimum Spanning Tree Heuristik* ein. Sie besteht aus folgenden Schritten.

- Zu dem bewerteten vollständigen Graphen  $K_n$  bestimme man (z. B. mit dem Verfahren von Kruskal) einen minimalen aufspannenden Baum  $T$ .
- Verdopple alle Kanten in  $T$ . Hierdurch erhält man einen Eulerschen Multigraphen  $T_D$ . Sei  $C$  ein Euler-Zug in  $T_D$ .
- In  $C$  ist ein Hamilton-Kreis enthalten, den man durch Überspringen schon durchlaufener Ecken erhalten kann.

**Beispiel:** Wir reproduzieren ein Beispiel bei M. Aigner (1996, S. 141). Die 6 Städte mit ihren jeweiligen Entfernungen sind in der folgenden Tabelle angegeben.

	A	B	D	F	K	W
Aachen	–	91	80	259	70	121
Bonn	91	–	77	175	27	84
Düsseldorf	80	77	–	232	47	29
Frankfurt	259	175	232	–	189	236
Köln	70	27	47	189	–	55
Wuppertal	121	84	29	236	55	–

In Abbildung 3.14 geben wir zunächst den mit dem Verfahren von Kruskal gewonnenen minimalen aufspannenden Baum an (der Reihe nach werden die Kanten KB, DW, KD, AK (die Kante KW darf nicht genommen werden, weil sonst ein Kreis gebildet wäre), BF konstruiert). Wenn dann alle Kanten verdoppelt werden, gibt es natürlich

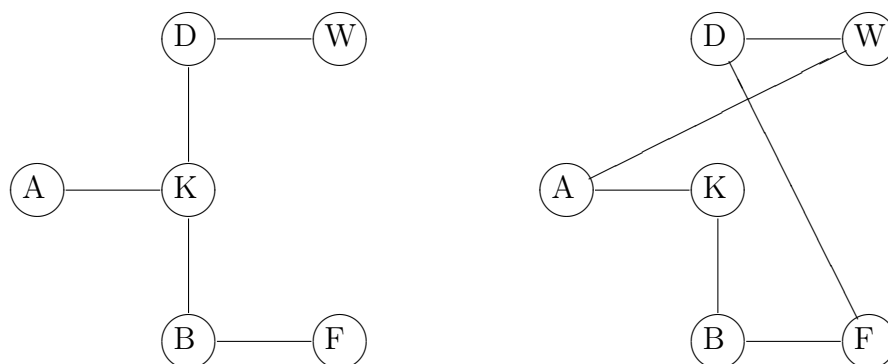


Abbildung 3.14: Minimum Spanning Tree Heuristik

eine Euler-Tour in dem so entstandenen Multigraphen. Z.B werden der Reihe nach die Kanten KB, BF, FB, BK, KD, DW, WD, DK, KA, AK durchlaufen. Hieraus erhält man den Hamilton-Kreis K, B, F, D, W, A, K, den wir in Abbildung 3.14 rechts eingetragen haben. Die Länge dieser Tour ist 654.  $\square$

### 3.2.3 Kürzeste Wege

Wir geben den Algorithmus von Dijkstra an. Dieser gibt zu einem zusammenhängenden gewichteten Graphen  $G = (V, E)$  und einer vorgegebenen Ecke  $x \in V$  einen  $G$  aufspannenden Baum  $T$  an mit der Eigenschaft, dass für *jedes*  $y \in V$  der eindeutige Weg von  $x$  nach  $y$  in  $T$  (gäbe es zwei Wege, so enthielte  $T$  einen Kreis) kürzester Weg von  $x$  nach  $y$  in  $G$  ist.

- Gegeben ist ein zusammenhängender Graph  $G = (V, E)$  mit  $n := |V|$ , eine nicht-negative Gewichtsfunktion  $f: E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  und  $x \in V$ .
- Setze  $x_0 := x$ ,  $V_0 := \{x_0\}$ ,  $E_0 := \emptyset$  und  $l(x_0) := 0$ .
- Für  $i = 0, \dots, n - 2$ :
  - Betrachte für alle Kanten  $e = uv$  mit  $u \in V_i$ ,  $v \in V \setminus V_i$  den Ausdruck  $g(e) := l(u) + f(e)$  und wähle unter diesen Kanten  $e' = u'v'$  mit  $g(e') = \min g(e)$ .
  - Setze  $x_{i+1} := v'$ ,  $e_{i+1} := e'$  und  $V_{i+1} := V_i \cup \{x_{i+1}\}$ ,  $E_{i+1} := E_i \cup \{e_{i+1}\}$  sowie  $l(x_{i+1}) := g(e')$ .
- Dann ist  $T := (V, E_{n-1})$  ein  $G$  aufspannender Baum mit der Eigenschaft, dass für jedes  $y \in V$  der (in  $T$ ) eindeutige Weg von  $x$  nach  $y$  ein minimaler Weg von  $x$  nach  $y$  in  $G$  ist.

Bevor wir beweisen, dass der Algorithmus von Dijkstra wirklich das Verlangte tut, geben wir ein Beispiel an.

**Beispiel:** Gegeben<sup>10</sup> sei der gewichtete Graph in Abbildung 3.15. Es sei  $x := \{1\}$ . Wir

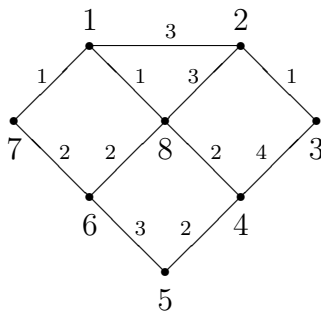


Abbildung 3.15: Kürzeste Wege?

erhalten dann die folgenden Schritte.

- $V_0 = \{1\}$ ,  $E_0 = \emptyset$ .
- $V_1 = \{1, 7\}$ ,  $E_1 = \{17\}$ . Statt 7 hätte auch die Ecke 8 aufgenommen werden können.

<sup>10</sup>Dieses Beispiel haben wir M. AIGNER (1996, S. 114) entnommen.

- $V_2 = \{1, 7, 8\}$ ,  $E_2 = \{17, 18\}$ .
- $V_3 = \{1, 7, 8, 2\}$ ,  $E_3 = \{17, 18, 12\}$ . Hier hätte statt der Ecke 2 auch die Ecke 6 oder die Ecke 4 aufgenommen werden können.
- $V_4 = \{1, 7, 8, 2, 6\}$ ,  $E_4 = \{17, 18, 12, 86\}$ . Statt der Kante 86 hätte auch die Kante 76 in  $E_4$  aufgenommen werden können.
- $V_5 = \{1, 7, 8, 2, 6, 4\}$ ,  $E_5 = \{17, 18, 12, 86, 84\}$ .
- $V_6 = \{1, 7, 8, 2, 6, 4, 3\}$ ,  $E_6 = \{17, 18, 12, 86, 84, 23\}$ .
- $V_7 = \{1, 7, 8, 2, 6, 4, 3, 5\}$ ,  $E_7 = \{17, 18, 12, 86, 84, 23, 45\}$ .

Der resultierende aufspannende Baum ist in Abbildung 3.16 rechts angegeben, links

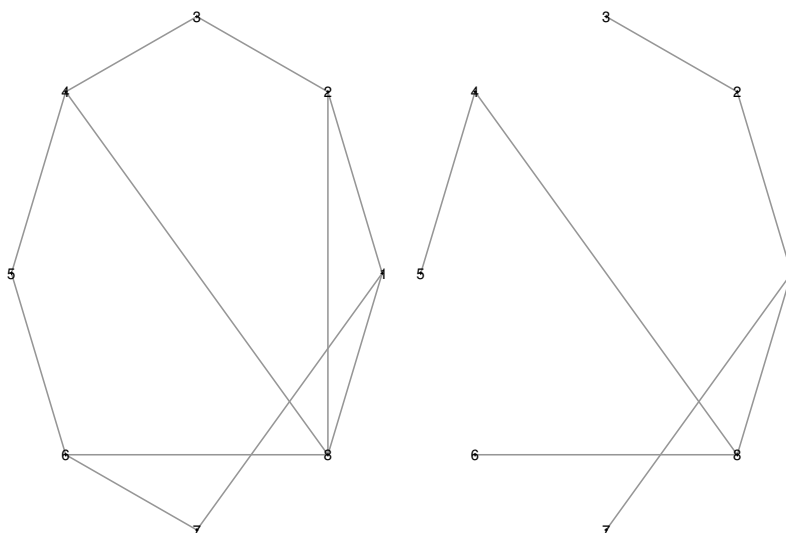


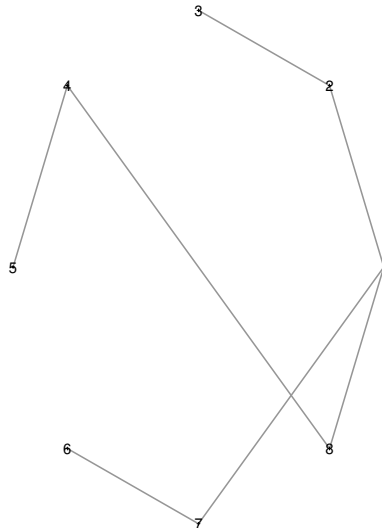
Abbildung 3.16: Resultat des Algorithmus von Dijkstra

findet man den Graphen selber. Hieraus liest man z. B. ab, dass ein kürzester Weg von 1 nach 5 durch  $\{1, 8, 4, 5\}$  gegeben ist.

Bevor wir die Korrektheit des Dijkstra-Verfahrens nachweisen, wollen wir noch die Möglichkeiten von Maple zur Lösung des Problems der kürzesten Wege testen. Im `networks` package gibt es hierzu die Funktion `shortpathtree`. Ihre Anwendung machen wir uns am besten durch die Lösung des obigen Beispiels klar. Nach

```
with(networks): new(G):
addvertex({1,2,3,4,5,6,7,8},G):
addedge([ {1,2}, {1,7}, {1,8}, {2,3}, {2,8}, {3,4}, {4,5}, {4,8}, {5,6}, {6,7}, {6,8} ],
weights=[3,1,1,1,3,4,2,2,3,2,2],G):
T:=shortpathtree(G,1): S:=draw(T):
plots[display]([S],thickness=3);
```

erhält man den in Abbildung 3.17 dargestellten Baum. Nur bemerkt sei, dass man mit

Abbildung 3.17: Resultat von `shortpathtree`

der Maple-Funktion `allpairs` kürzeste Wege zwischen je zwei Ecken eines Graphen bestimmen kann. Man informiere sich selber hierüber.  $\square$

**Satz 2.3** Sei  $G = (V, E)$  ein zusammenhängender Graph,  $f: E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  eine nicht-negative Kantenbewertung und  $x \in V$ . Der Algorithmus von Dijkstra ergibt einen  $G$  aufspannenden Baum mit der Eigenschaft, dass für jedes  $y \in V$  der in  $T$  eindeutige Weg von  $x$  nach  $y$  ein minimaler  $(x, y)$ -Weg mit  $d(x, y) = l(y)$  ist.

**Beweis:** Offenbar ist  $T_i = (V_i, E_i)$  zusammenhängend (leicht durch vollständige Induktion zu zeigen) und  $|E_i| = |V_i| - 1$ ,  $i = 1, \dots, n - 1$ . Nach Satz 2.1 ist  $T_i$  ein Baum, insbesondere also  $T_{n-1} = (V, E_{n-1})$  ein  $G$  aufspannender Baum. Durch vollständige Induktion nach  $i$  zeigen wir, dass für  $i = 1, \dots, n - 1$  der in  $T_i$  eindeutige Weg von  $x = x_0$  nach  $y \in V_i \setminus \{x\}$  ein kürzester Weg in  $G$  und  $d(x, y) = l(y)$  seine Länge ist.

Für den Induktionsanfang ist  $i = 1$ . Im ersten Schritt wird  $x_1 \in V \setminus \{x\}$  so bestimmt, dass die Kante  $e_1 = x_0x_1$  minimales Gewicht hat. Daher ist durch  $x_0x_1$ , den einzigen Weg in  $T_1$ , ein kürzester Weg von  $x = x_0$  nach  $y = x_1$  gegeben, ferner ist  $l(x_1) = f(e_1) = d(x_0, x_1)$ .

Die Aussage sei für  $i$  richtig. Zu zeigen ist, dass sie auch für  $i + 1$  richtig ist. Hierfür genügt es,  $y = x_{i+1}$  zu betrachten. Die Kante  $e' = u'x_{i+1}$  wurde unter allen Kanten  $e = uv$  mit  $u \in V_i$ ,  $v \in V \setminus V_i$ , so gewählt, dass  $l(u) + f(e)$  minimal ist. Mit  $P_0$  werde der Weg von  $x = x_0$  über  $u' \in V_i$  nach  $y = x_{i+1}$  bezeichnet. Seine Länge ist nach Induktionsvoraussetzung

$$l(P_0) = d(x_0, u') + f(e') = l(u') + f(e') = l(x_{i+1}).$$

Wir wollen zeigen, dass  $P_0$  ein kürzester Weg von  $x = x_0$  nach  $y = x_{i+1}$  ist. Hierzu nehmen wir an,  $P$  sei ein kürzester Weg von  $x = x_0$  nach  $y = x_{i+1}$ . Sei  $u$  die letzte Ecke aus  $V_i$  im Weg  $P$  (eine solche muss es geben, denn die erste Ecke  $x = x_0$  liegt in  $V_i$ ),

weiter sei  $v \in V \setminus V_i$  der Nachfolger (auch diesen muss es geben, denn  $y = x_{i+1} \in V \setminus V_i$ ) im Weg  $P$ , ferner sei  $e := uv$ . Teilwege eines kürzesten Weges sind ebenfalls kürzeste Wege, d. h. in  $P = P(x_0, u)P(v, x_{i+1})$  sind auch  $P(x_0, u)$  und  $P(v, x_{i+1})$  kürzeste Wege von  $x_0$  nach  $u \in E_i$  bzw. von  $v$  nach  $x_{i+1}$ . Nach Induktionsannahme ist ferner

$$l(P(x_0, u)) = d(x_0, u) = l(u).$$

Daher ist

$$\begin{aligned} d(x_0, x_{i+1}) &= l(P) \\ &= l(P(x_0, u)) + f(e) + l(P(v, x_{i+1})) \\ &= l(u) + f(e) + \underbrace{l(P(v, x_{i+1}))}_{\geq 0} \\ &\geq l(u) + f(e) \\ &\geq l(u') + f(e') \\ &= l(x_{i+1}) \\ &= l(P_0). \end{aligned}$$

Also ist  $P_0$  ein kürzester Weg und  $l(P_0) = l(x_{i+1})$ . Damit ist die Induktionsbehauptung und der ganze Satz bewiesen.  $\square$

**Bemerkung:** Es wurde im Beweis entscheidend benutzt, dass die (gewichtete) Länge von Wegen nichtnegativ ist, was natürlich insbesondere für nichtnegative Kantenbewertungen der Fall ist.  $\square$

### 3.2.4 Aufgaben

1. Man zeichne alle Bäume mit höchstens 5 Ecken.
2. Sei  $G = (V, E)$  ein zusammenhängender Graph. Mit  $d(x, y)$  bezeichnen wir den Abstand zweier Ecken  $x, y \in V$ , also die Länge eines kürzesten Weges von  $x$  nach  $y$ . Für  $x \in V$  definieren wir  $r(x) := \max_{y \in V \setminus \{x\}} d(x, y)$  als die *Exzentrizität* in  $x$ , also die Länge eines längsten von  $x$  ausgehenden kürzesten Weges. Dann heißt  $r(G) := \min_{x \in V} r(x)$  der *Radius* von  $G$  und  $Z(G) := \{x \in V : r(x) = r(G)\}$  das *Zentrum* von  $G$ .
  - (a) Was ist der Radius und was das Zentrum zu dem in Abbildung 3.18 dargestellten Graphen  $G$ ?
  - (b) Man zeige, dass das Zentrum eines Baumes entweder aus einer Ecke oder zwei benachbarten Ecken besteht.
3. In der folgenden Tabelle<sup>11</sup> sind die Entfernungen (in Hunderten von Meilen) von sechs

<sup>11</sup>Siehe J. M. ALDOUS, R. J. WILSON (2000, S.186).

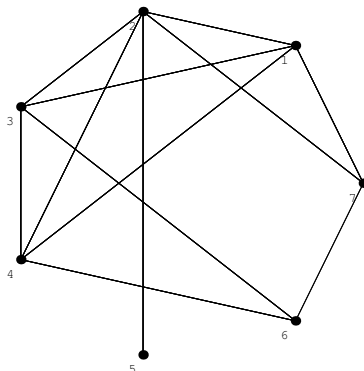


Abbildung 3.18: Was ist der Radius, was ist das Zentrum?

Städten angegeben.

	Berlin	London	Moskau	Paris	Rom	Sevilla
Berlin	–	7	11	7	10	15
London	7	–	18	3	12	11
Moskau	11	18	–	18	20	27
Paris	7	3	18	–	9	8
Rom	10	12	20	9	–	13
Sevilla	15	11	27	8	13	–

- (a) In dem zugehörigen gewichteten vollständigen Graphen bestimme man einen minimalen aufspannenden Baum.
  - (b) Mit der Minimum Spanning Tree Heuristik bestimme man eine (suboptimale) Rundtour.
4. Eine Firma hat sich zu überlegen, welches zusammenhängende Pipelinesetzwerk sie zwischen 7 Quellen  $A, B, \dots, G$  und einer Fabrik  $H$  bauen sollte. Die möglichen Pipelines und ihre Konstruktionskosten (in gewissen Geldeinheiten) sind gegeben durch

Pipeline	Kosten	Pipeline	Kosten
$AB$	23	$CG$	10
$AE$	17	$DE$	14
$AD$	19	$DF$	20
$BC$	15	$EH$	28
$BE$	30	$FG$	11
$BF$	27	$FH$	35

Welches Pipelinesetzwerk sollte gebaut werden und was sind seine Konstruktionskosten? Was ist die kostengünstigste Verbindung von der Quelle  $A$  zur Fabrik  $H$ ?

5. Ein zusammenhängender Graph  $G = (V, E)$  habe paarweise verschiedene Gewichte auf den Kanten. Man zeige, dass  $G$  einen *eindeutigen* minimalen aufspannenden Baum besitzt.

## 3.3 Das Färben von Landkarten und anderen Dingen

### 3.3.1 Beispiele

**Beispiel:** In Abbildung 3.19 haben wir<sup>12</sup> den afrikanischen Kontinent und seine Länder aufgetragen. Die Abbildung wurde mit Hilfe des `Miscellaneous‘WorldPlot‘` package

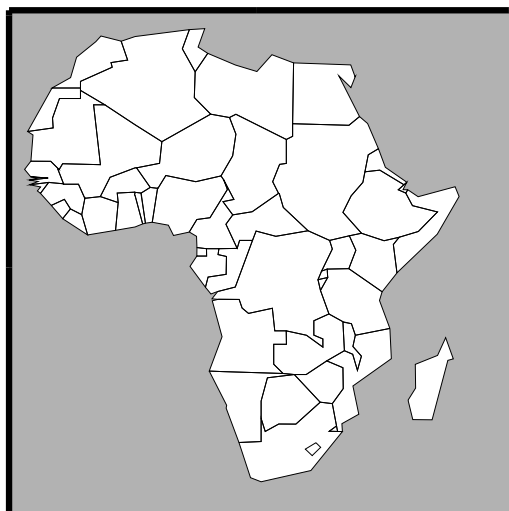


Abbildung 3.19: Die Länder Afrikas

von *Mathematica* hergestellt. Und zwar auf die folgende Weise:

```
<<Miscellaneous‘WorldPlot‘
afri=WorldPlot[Africa,WorldBackground->GrayLevel[0.7],
  WorldGrid->None,WorldFrame->Thickness[.012]]
Graphics[afri]
Display["afric.eps",%,"EPS"]
```

Durch die letzten beiden Befehle findet ein Export in ein eps-file statt.

Nun sollen die Länder so gefärbt werden, dass “benachbarte” Länder unterschiedlich gefärbt werden. Hierbei gelten zwei Länder, die sich nur in einer “Ecke” treffen, nicht als benachbart. Einer der berühmtesten Sätze der Mathematik (und der Graphentheorie) ist der *Vierfarbensatz*, dass sich nämlich jeder zusammenhängende ebene (was das ist, werden wir erklären müssen) Graph (bzw. die zugehörige Landkarte) durch vier Farben färben lässt. Bekanntlich gibt es für diesen Satz bisher nur einen Computerbeweis (K. Appel, W. Haken (1976)), daher wird gelegentlich immer noch von der *Vierfarbenvermutung* gesprochen.  $\square$

**Beispiel:** Ein Zoo muss geeignete Umgebungen für acht Tierarten  $A, B, \dots, H$  bestimmen, wobei aus Sicherheitsgründen gewisse Tiere von anderen getrennt werden müssen. Es soll die minimale Anzahl der “Umgebungen” bestimmt werden, in denen die Tiere

<sup>12</sup>Wie aktuell diese Karte ist, kann ich nicht beurteilen.

sicher leben können. In der folgenden Tabelle gibt ein \* eine notwendige Trennung an.

	A	B	C	D	E	F	G	H
A	—	*	—	—	*	*	—	*
B	*	—	*	—	—	*	—	*
C	—	*	—	*	—	*	*	*
D	—	—	*	—	*	*	*	—
E	*	—	—	*	—	*	*	—
F	*	*	*	*	*	—	—	—
G	—	—	*	*	*	—	—	*
H	*	*	*	—	—	—	*	—

Wir definieren einen Graphen mit den Ecken  $A, \dots, H$ . Zwei Ecken werden durch eine Kante verbunden, wenn die beiden Tiere sich nicht vertragen. Die Aufgabe besteht dann darin, die Ecken mit möglichst wenig Farben so zu färben, dass benachbarte Ecken unterschiedlich gefärbt sind. Benutzt man Maple zur Definition des entsprechenden Graphen (auf die übliche Weise) und zeichnet diesen mit dem `draw`-Befehl, so erhält man das in Abbildung 3.20 angegebene Bild. Auch wenn das auf den ersten

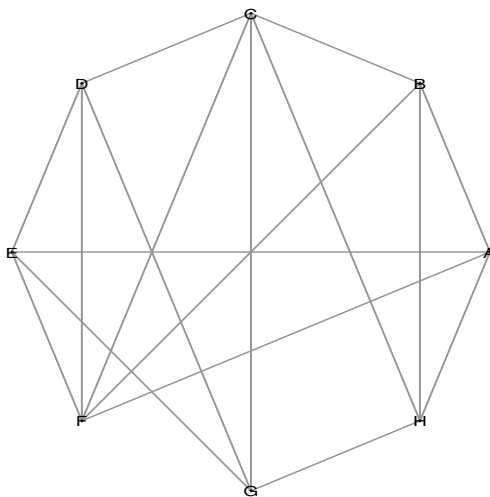


Abbildung 3.20: Ein Verträglichkeitsgraph

Blick nicht offensichtlich ist, ist dies ein planarer Graph, d. h. die Kanten können überschneidungsfrei gezeichnet werden. Die Antwort auf `isplanar(G)`; ist in der Tat *true*. Eine zulässige Färbung mit 4 Farben ist möglich, man braucht nur  $\{A, G\}$ ,  $\{B, D\}$ ,  $\{C, E\}$  und  $\{F, H\}$  vier unterschiedliche Farben zu geben.  $\square$

### 3.3.2 Planare Graphen

Grob gesagt verstehen wir unter einem *planaren* Graphen einen Graphen, den man ohne Kantenüberschneidungen in die Ebene einbetten (bzw. in der Ebene zeichnen) kann bzw. einen hierzu *isomorphen* Graphen. Wir benötigen einige Definitionen.



**Definition 3.1** Zwei Graphen  $G = (V, E)$  und  $G' = (V', E')$  heißen *isomorph*, wenn es eine Bijektion  $\phi : V \rightarrow V'$  gibt derart, dass  $(x, y) \in E$  genau dann, wenn  $(\phi(x), \phi(y)) \in E'$ .

**Beispiel:** Man betrachte die beiden Graphen in Abbildung 3.21. Die Isomorphie ver-

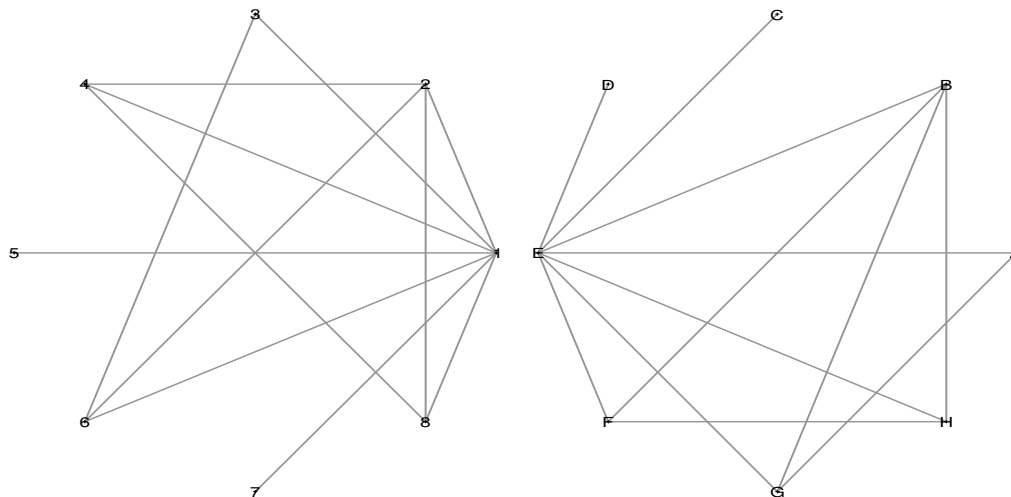


Abbildung 3.21: Zwei isomorphe Graphen

mittelnde Abbildung  $\phi$  liest man aus

$$\phi : \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline E & B & A & F & C & G & D & H \end{array}$$

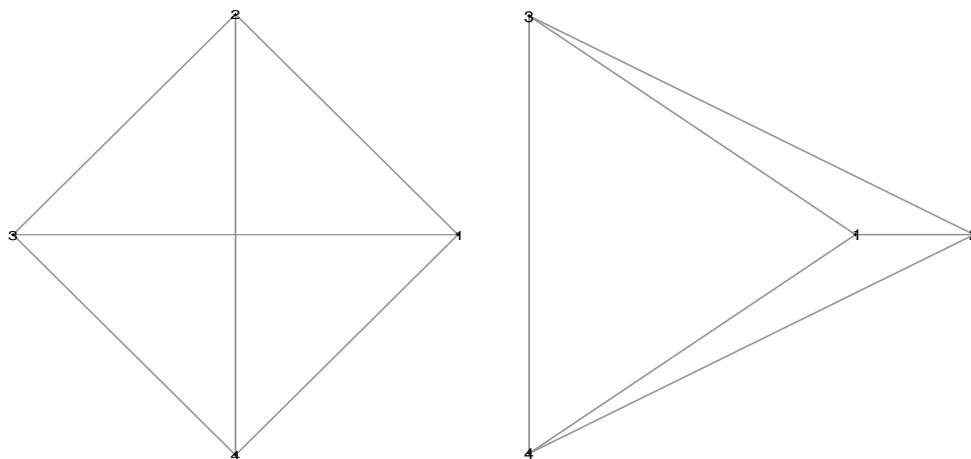
ab. □

**Definition 3.2** Eine stetige Abbildung  $e: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  ist ein *Jordanbogen* im  $\mathbb{R}^2$ , wenn  $e(t) \neq e(s)$  für alle  $s, t \in [0, 1]$  mit  $s \neq t$ .

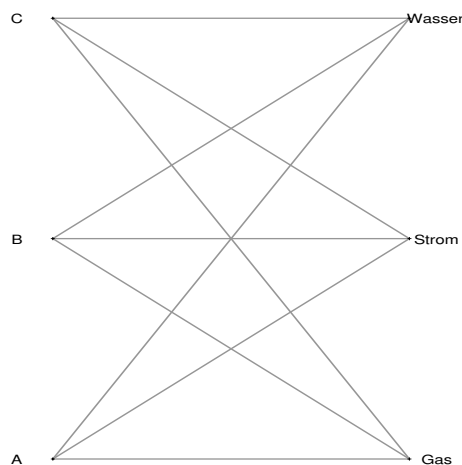
**Definition 3.3** Ein Graph  $G = (V, E)$  heißt ein *ebener Graph*, wenn folgende drei Bedingungen erfüllt sind:

1. Es ist  $V = \{x_1, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}^2$ .
2. Es ist  $E = \{e_1, \dots, e_m\}$  mit Jordanbögen  $e_1, \dots, e_m$  im  $\mathbb{R}^2$ , wobei  $e_i(0), e_i(1) \in V$  und  $e_i(t) \notin V$  für alle  $t \in (0, 1)$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Die Ecke  $x_i$  und die Kante  $e_j$  heißen *inzident*, wenn  $x_i \in \{e_j(0), e_j(1)\}$ .
3. Die Kanten von  $G$  haben (außer Ecken) keine Schnittpunkte. Sind also  $e_i$  und  $e_j$  zwei verschiedene Kanten, so ist  $e_i(s) \neq e_j(t)$  für alle  $s, t \in (0, 1)$ . Zwei verschiedene Kanten heißen *inzident*, wenn sie mit einer gemeinsamen Ecke inzidieren.

**Definition 3.4** Ist  $G' = (V', E')$  ein Graph, der zu einem ebenen Graphen  $G = (V, E)$  isomorph ist, so heißt  $G$  eine *Einbettung* von  $G'$  in den  $\mathbb{R}^2$ . Ein Graph, der zu einem ebenen Graphen isomorph ist, heißt ein *planarer Graph*.

Abbildung 3.22: Der  $K_4$  ist planar

**Beispiel:** Zeichnet man den vollständigen Graphen in der üblichen Weise (z. B. durch `draw(complete(4))`); so findet eine Überschneidung der Kanten statt, siehe Abbildung 3.22 links. Rechts geben wir einen isomorphen Graphen an, der  $K_4$  ist also planar. Auch der vollständige bipartite Graph  $K_{2,3}$  ist planar (Beweis?), nicht aber  $K_{3,3}$  und  $K_5$ , wie wir später zeigen werden. Dass der  $K_{3,3}$  nicht planar ist, kann folgendermaßen interpretiert werden. Angenommen, drei Nachbarn A, B und C wollen mit Gas, Strom und Wasser versorgt werden. Dann ist es nicht möglich, die Versorgungsleitungen kreuzungsfrei zu verlegen. Siehe Abbildung 3.23. Zwar kann man einige der Leitungen

Abbildung 3.23: Das Utility Problem:  $K_{3,3}$  ist nicht planar

“außen herum” legen, aber nicht alle. □

**Beispiel:** In Abbildung 3.24 geben wir eine Karte mit einem Teil Europas wieder. Genauer haben wir hier 10 Länder eingetragen. Bemerkte sei, dass wir (Entschuldigung!) Andorra, Liechtenstein, Monaco und San Marino fortgelassen haben. In Abbildung 3.25 geben wir diese Landkarte als einen ebenen Graphen an. Hier treffen sich Italien und Spanien nur in einer Ecke, sind also nicht benachbart. Ferner haben wir darauf

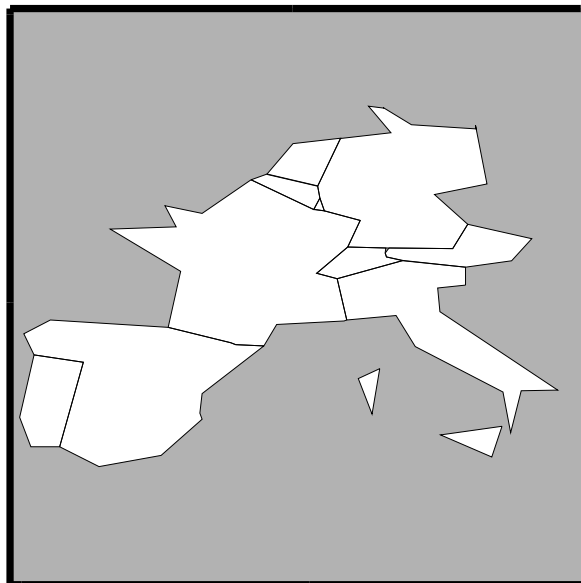


Abbildung 3.24: Einige Länder Europas

geachtet, dass ein Grenzübertritt nur über genau eine Kante möglich ist, dass also keine unnötigen Ecken oder Kanten vorhanden sind<sup>13</sup>  $\square$

Sei  $G = (V, E)$  ein zusammenhängender, ebener Graph. Fassen wir  $G$  als Vereinigung der Ecken und Kanten auf, so ist  $\mathbb{R}^2 \setminus G$  disjunkte Vereinigung zusammenhängender Gebiete, von denen genau eines nicht beschränkt ist. Diese Zusammenhangskomponenten von  $\mathbb{R}^2 \setminus G$  nennen wir *Länder* (auch “faces” genannt, man denke an Seitenflächen eines Polyeders). Die Anzahl der Länder eines planaren Graphen ist natürlich die Anzahl der Länder einer ebenen Einbettung. Nun führen wir zum ebenen Graphen  $G = (V, E)$  den dualen Graphen  $G^* = (V^*, E^*)$  ein, und zwar folgendermaßen: Die Ecken von  $G^*$  sind die Länder in  $G$ , wobei auch das “Außenland” ein Land, also eine Ecke in  $G^*$  ist. Zwei Ecken in  $G^*$  (bzw. Länder in  $G$ ) werden durch eine Kante verbunden, wenn die beiden Länder eine gemeinsame Grenze haben. Hierdurch wird das “Länderfärbungsproblem” in  $G$  auf ein “Eckenfärbungsproblem” in  $G^*$  zurückgeführt.

**Beispiel:** Wir geben in Abbildung 3.26 den dualen Graphen zu dem in Abbildung 3.25 angegebenen an. Hierzu haben wir die Länder mit ihrem Zentrum identifiziert, das sind die Ecken im dualen Graphen, und diese Zentren mit einer Kante verbunden, wenn die Länder eine gemeinsame Grenze haben. Schließlich wird der Außenwelt noch eine Ecke  $W$  zugeordnet, die noch mit allen Ländern außer den Binnenländern Luxemburg und Schweiz zu verbinden ist. Man erkennt, dass der duale Graph wieder zusammenhängend und eben ist.  $\square$

Dass mit  $G$  auch der duale Graph  $G^*$  zusammenhängend ist, ist nicht schwer einzusehen. Denn aus jedem beschränkten Gebiet von  $G$  gelangt man über Kanten benach-

<sup>13</sup>Dies gilt allerdings nicht für das Seefahrerland Portugal. Hier ist ein Übergang zur Außenwelt über zwei Kanten möglich. Wenn wir Mehrfachkanten zulassen würden (was durchaus möglich ist), hätten wir diese Ausnahmeregelung vermeiden können.

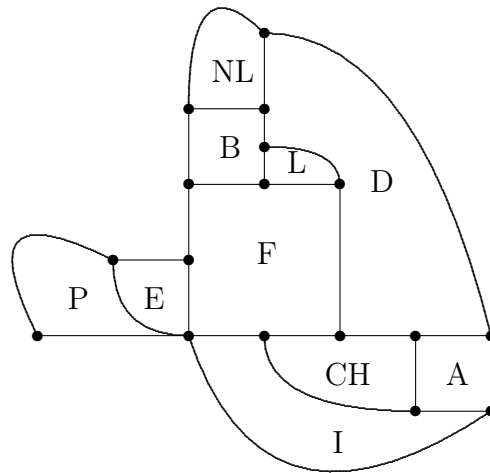


Abbildung 3.25: Länder Europas als ebener Graph

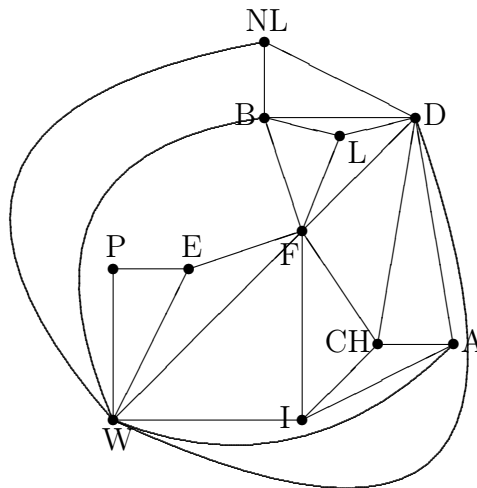


Abbildung 3.26: Der duale Graph zu dem Graphen in Abbildung 3.25

barter Gebiete zum äußeren Gebiet von  $G$ . Von jeder Ecke im dualen Graphen, die zu einem (beschränkten) Land gehört, ist also die Ecke, die die Außenwelt repräsentiert, erreichbar. Nicht ganz so einfach scheint die entsprechende Aussage über die Planarität des dualen Graphen zu sein. Wir werden dies ohne weiteren Beweis benutzen (und sind dann in guter Gesellschaft vieler Autoren).

### 3.3.3 Die Eulersche Polyederformel

Im folgenden spielt oft ein Argument eine Rolle, welches im sogenannten Handshaking-Lemma auftritt. Es beruht im Prinzip darauf, dass man die Anzahl der Elemente einer Menge auf zwei Weisen zählt. Dieses Handshaking-Lemma kam in Aufgabe 6 in Abschnitt 3.1 schon einmal vor, jetzt wollen wir den einfachen Beweis nachholen.

**Lemma 3.5** Sei  $G = (V, E)$  ein Graph und  $|E|$  die Anzahl der Kanten. Dann ist

$$\sum_{x \in V} d(x) = 2|E|,$$

also die Summe der Grade aller Ecken gerade das Zweifache der Anzahl der Kanten.

**Beweis:** Wir betrachten die Menge aller Paare

$$P := \{(x, e) \in V \times E : x \in e\}$$

und berechnen die Anzahl ihrer Elemente auf zweierlei Weise. Da jede Kante  $e \in E$  zwei Endecken besitzt, ist  $|P| = 2|E|$ . Andererseits gibt es zu jeder Ecke  $x \in V$  genau  $d(x)$  benachbarte Ecken, so dass  $|P| = \sum_{x \in V} d(x)$ . Damit ist der einfache Beweis schon abgeschlossen.  $\square$

Insbesondere ist die Summe der Grade in einem Graphen eine gerade Zahl. Diese Aussage heißt das “Handshaking-Lemma”, da es die Tatsache ausdrückt, dass bei einer Party die Gesamtzahl der geschüttelten Hände eine gerade Zahl ist.

Es folgt das Handshaking-Lemma für planare Graphen. Hierbei definieren wir für ein Land  $l$  den Grad  $\deg(l)$  als die Anzahl der Kanten, die man benötigt, um einmal um das Land “herumzuwandern”.

**Beispiel:** Man betrachte die Graphen in Abbildung 3.27. Für den Graphen links zählt

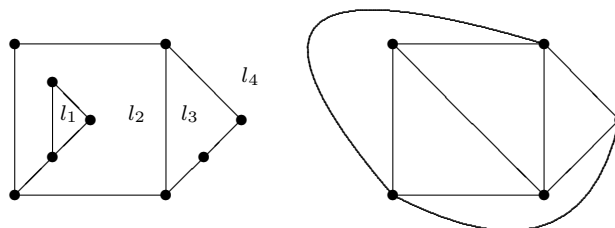


Abbildung 3.27: Planare Graphen

man ab:  $\deg(l_1) = 3$ ,  $\deg(l_2) = 9$  (beachte, dass eine Kante zweimal durchlaufen wird),  $\deg(l_3) = 4$  und  $\deg(l_4) = 6$ . Die Summe aller Grade ist 22, das Doppelte der Anzahl der Kanten. Das Entsprechende gilt auch für den Graphen rechts: Jedes der 6 Länder hat den Grad 3, es gibt neun Kanten.  $\square$

**Lemma 3.6** Sei  $G = (V, E)$  ein planarer Graph und  $F$  die Menge der Länder. Dann ist

$$\sum_{l \in F} \deg(l) = 2|E|.$$

**Beweis:** Eine Kante  $e \in E$  kann Grenze für genau zwei verschiedene Länder sein oder auf dem Rand genau eines Landes liegen (in Abbildung 3.27 links ist dies z. B. für eine das Land  $l_2$  begrenzende Kante der Fall). Im ersten Fall trägt sie genau einmal bei der Berechnung des Grades des entsprechenden Landes bei, im zweiten Fall zweimal. Summiert man also die Grade aller Länder, so wird jede Kante genau zweimal berücksichtigt. Das ist schon der Beweis der behaupteten Gleichung.  $\square$

Nun definieren wir:

**Definition 3.7** Sei  $G = (V, E)$  ein zusammenhängender Graph. Eine Kante  $e \in E$  heißt eine *Brücke* in  $G$ , wenn  $G' := (V, E \setminus \{e\})$  nicht zusammenhängend ist.

Die Aussage des nächsten Satzes wird die *Eulersche Polyederformel* genannt.

**Satz 3.8** Sei  $G = (V, E)$  ein zusammenhängender planarer Graph mit  $n$  Ecken,  $m$  Kanten und  $f$  Ländern. Dann ist  $n - m + f = 2$ .

**Beweis:** Wir beweisen die Behauptung durch vollständige Induktion nach  $m$ , der Anzahl der Kanten von  $G$ . Ist  $m = 1$ , so ist  $n = 2$  und  $f = 1$ , die Aussage also richtig. Wir nehmen nun an, die Aussage sei für Graphen mit  $\leq m - 1$  Kanten richtig. Angenommen,  $e \in E$  sei keine Brücke. Nach Definition einer Brücke ist  $G' := (V, E \setminus \{e\})$  zusammenhängend und natürlich planar. Dann hat  $G'$  genau so viel Ecken wie  $G$ , eine Kante und ein Land weniger als  $G$ , denn nach dem Entfernen der Grenze  $e$  wird aus zwei Ländern eines. Nach Induktionsvoraussetzung ist also

$$n - (m - 1) + (f - 1) = 2$$

bzw.  $n - m + f = 2$ . Zum Schluss müssen wir noch den Fall betrachten, dass jede Kante von  $G$  eine Brücke ist. Dann ist  $G$  ein Baum, also kreisfrei (denn wenn es einen Kreis geben würde, so wäre jede Kante in diesem Kreis keine Brücke). Nach Satz 2.1 ist  $m = n - 1$ . Ferner ist  $f = 1$ , da ein Baum genau ein (nicht beschränktes) Land besitzt. Also gilt auch hier  $n - m + f = 2$ . Damit ist der Satz bewiesen.  $\square$

**Beispiel:** Es gibt bekanntlich fünf reguläre Polyeder: Tetraeder, Würfel, Oktaeder, Dodekaeder und Ikosaeder. In Abbildung 3.28 geben wir das Dodekaeder und das Iko-

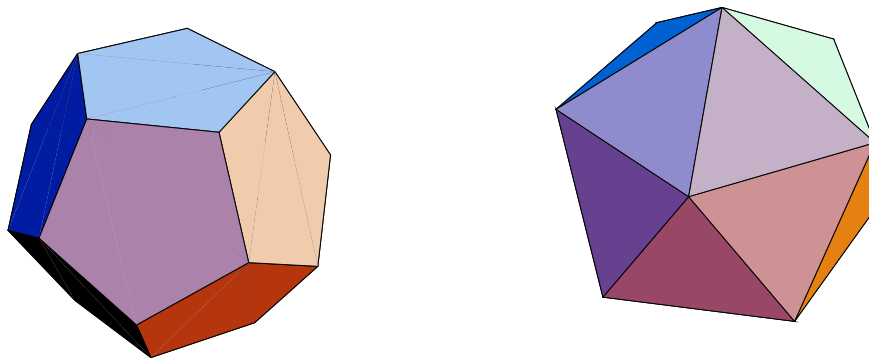


Abbildung 3.28: Das Dodekaeder und das Ikosaeder

saeder wieder. Ersteres hat 20 Ecken, 30 Kanten und 12 Flächen, letzteres hat 12 Ecken, 30 Kanten und 20 Flächen. Die Anzahl der Flächen bestimmt den Namen.  $\square$

Als Folgerung aus der Eulerschen Polyederformel erhalten wir eine Aussage, der wir entnehmen können, dass ein planarer Graph verhältnismäßig wenig Kanten besitzen kann, da deren Anzahl durch eine lineare Funktion der Eckenzahl beschränkt werden kann.

**Korollar 3.9** Sei  $G = (V, E)$  ein zusammenhängender planarer Graph mit  $|V| \geq 3$ . Dann gilt:

1. Es ist  $|E| \leq 3|V| - 6$ .
2. Enthält  $G$  kein Dreieck (das ist ein Kreis mit drei Ecken bzw. Kanten), so ist  $|E| \leq 2|V| - 4$ .
3. Es existiert eine Ecke mit einem Grad  $\leq 5$ .

**Beweis:** Natürlich können wir annehmen, dass  $G$  ein ebener Graph ist. Sei  $n := |V|$  die Anzahl der Ecken,  $m := |E|$  die Anzahl der Kanten und  $f$  die Anzahl der Länder. Für  $m = 2$  ist die Aussage richtig, so dass  $m \geq 3$  angenommen werden kann. Jedes Land wird von mindestens drei Kanten begrenzt, jede Kante gehört zum Rand von höchstens zwei Ländern<sup>14</sup>. Daher ist  $3f \leq 2m$ . Wegen der Eulerschen Polyederformel ist  $3m - 3n + 6 \leq 2m$  bzw.  $m \leq 3n - 6$ , was schon die erste Behauptung ist. Enthält  $G$  kein Dreieck, so wird jedes Land von mindestens vier Kanten begrenzt, was  $4f \leq 2m$  nach sich zieht. Einsetzen in die Eulersche Polyederformel liefert  $m \leq 2n - 4$ , die zweite Behauptung. Zum Beweis der dritten Behauptung bezeichnen wir mit  $d(x)$  den Grad der Ecke  $x \in V$ . Angenommen, es sei  $d(x) \geq 6$  für alle  $x \in V$ . Man definiere (wie beim Beweis des Handshaking-Lemmas)  $P := \{(x, e) \in V \times E : x \in e\}$ . Nach Annahme ist einerseits  $|P| \geq 6n$ , andererseits ist  $|P| = 2m$ , insbesondere also  $m \geq 3n$ . Dies ist ein Widerspruch zum ersten Teil des Korollars.  $\square$

**Beispiel:** Der  $K_5$  hat  $n = 5$  Ecken und  $m = 10$  Kanten. Wegen der ersten der beiden obigen Aussagen ist  $K_5$  nicht planar. Der vollständige bipartite Graph  $K_{3,3}$  hat  $n = 6$  Ecken und  $m = 9$  Kanten, weiter enthält  $K_{3,3}$  natürlich kein Dreieck. Aus der zweiten der beiden obigen Aussagen folgt, dass  $K_{3,3}$  nicht planar ist.  $\square$

### 3.3.4 Der Sechs- und der Fünffarbensatz

Es geht jetzt um das Färben planarer Graphen mit möglichst wenig Farben. Dass dazu i. Allg. mindestens vier Farben nötig sind, erkennt man an dem Graphen in Abbildung 3.29 links, wobei man daran denken muss, dass auch das unbeschränkte



Abbildung 3.29: Vier Farben sind notwendig

Land gefärbt werden muss. Rechts haben wir den dualen Graphen angegeben. In diesem gibt es eine Ecke mit drei Nachbarn. Also sind mindestens vier Farben notwendig.

<sup>14</sup>Es folgt eine Art Handshaking-Argument. Man betrachte die Menge von Paaren, bestehend aus einem Land und einer dieses Land begrenzenden Kante. Die Anzahl der Elemente dieser Menge ist mindestens  $3f$  und höchstens  $2m$ .

Nun wollen wir den *Sechsfarbensatz* formulieren und beweisen<sup>15</sup>.

**Satz 3.10** *Ein zusammenhängender, ebener Graph bzw. die zugehörige Landkarte lässt sich durch sechs Farben färben.*

**Beweis:** Wir zeigen, dass eine Eckenfärbung eines zusammenhängenden, planaren Graphen  $G = (V, E)$  mit sechs Farben möglich ist (wobei natürlich zwei benachbarte Ecken unterschiedlich gefärbt sind). Eine Anwendung dieses Resultats auf den dualen Graphen liefert dann die Behauptung<sup>16</sup>. Wir beweisen die Aussage durch vollständige Induktion nach der Anzahl  $n$  der Ecken von  $G$ . Die Aussage ist trivialerweise richtig für Graphen mit  $n \leq 6$  Ecken. Wir nehmen an, sie sei richtig für Graphen mit weniger als  $n$  Ecken und zeigen, dass eine Eckenfärbung eines zusammenhängenden, planaren Graphen mit sechs (oder weniger) Farben möglich ist. Wegen des dritten Teils von Korollar 3.9 gibt es eine Ecke  $v$  in  $G$  mit  $d(v) \leq 5$ . Also gibt es eine Ecke  $v$  mit höchstens fünf Nachbarn. Diese Ecke mitsamt der Kanten, auf denen sie liegt, entferne man aus dem Graphen  $G$  und erhalte so den (nach wie vor planaren, möglicherweise aber nicht zusammenhängenden) Graphen  $H$  mit  $n - 1$  Ecken. Diesen Prozess veranschaulichen wir uns in Abbildung 3.30. Nach Induktionsannahme können die Ecken von  $H$  (bzw.

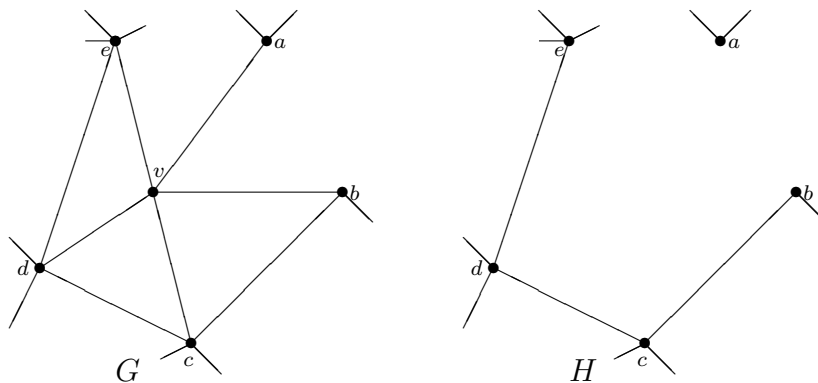


Abbildung 3.30: Gewinn  $H$  aus  $G$  durch Entfernen der Ecke  $v$

der Komponenten von  $H$ , wenn  $H$  nicht zusammenhängend ist) mit sechs Farben so gefärbt werden, dass benachbarte Ecken unterschiedlich gefärbt sind. Die höchstens fünf Nachbarn von  $v$  sind dadurch gefärbt, hierzu wurden natürlich höchstens fünf Farben benötigt. Zur Färbung von  $v$  steht noch eine Farbe zur Verfügung, so dass eine Eckenfärbung von  $G$  mit höchstens sechs Farben gelungen ist. Der Beweis ist damit abgeschlossen.  $\square$

Mit etwas mehr Aufwand können wir auch den *Fünffarbensatz* beweisen.

**Satz 3.11** *Ein zusammenhängender, ebener Graph bzw. die zugehörige Landkarte lässt sich durch fünf Farben färben.*

<sup>15</sup>Wir folgen hier und auch beim entsprechenden Fünffarbensatz der Darstellung bei J. M. Aldous, R. J. Wilson (2000, S. 284 ff.).

<sup>16</sup>Hierbei benutzen wir, dass der zu einem zusammenhängenden, planaren Graphen duale Graph ebenfalls zusammenhängend und planar ist.



**Beweis:** Der Beginn des Beweises ist wie beim Sechsfarbensatz. Entsprechend zeigen wir, dass die Ecken eines zusammenhängenden, planaren Graphen  $G$  mit fünf Farben so gefärbt werden können, dass benachbarte Ecken unterschiedliche Farben haben. Dies geschieht wieder durch vollständige Induktion nach  $n$ , der Anzahl der Ecken von  $G$ . Der Induktionsanfang kann für  $n = 1, 2, 3, 4, 5$  gemacht werden, die Annahme ist, die Aussage sei für zusammenhängende, planare Graphen mit weniger als  $n$  Ecken richtig. Auch der Beginn des Induktionsbeweises ist wie beim Beweis des Sechsfarbensatz. Es gibt eine Ecke  $v$  in  $G$  mit höchstens fünf Nachbarn. Diese Ecke mitsamt der Kanten, auf denen sie liegt, entferne man wieder aus dem Graphen  $G$  und erhalte so den Graphen  $H$  mit  $n - 1$  Ecken (siehe Abbildung 3.30). Nach Induktionsvoraussetzung können die Ecken von  $H$  (bzw. der Komponenten von  $H$ , wenn  $H$  nicht zusammenhängend ist) mit fünf Farben so gefärbt werden, dass benachbarte Ecken unterschiedlich gefärbt sind. Wir können annehmen, dass  $v$  fünf Nachbarn besitzt, die mit fünf verschiedenen Farben gefärbt sind, da man andernfalls noch eine Farbe zur Färbung von  $v$  übrig hätte. Die fünf Farben seien etwa (wir benutzen englische Vokabeln, da sich die Anfangsbuchstaben der Farben besser unterscheiden) blue (b), green (g), purple (p), red (r) und amber (a), siehe Abbildung 3.31. Wir greifen uns zwei beliebige Nachbarn von  $v$  heraus,

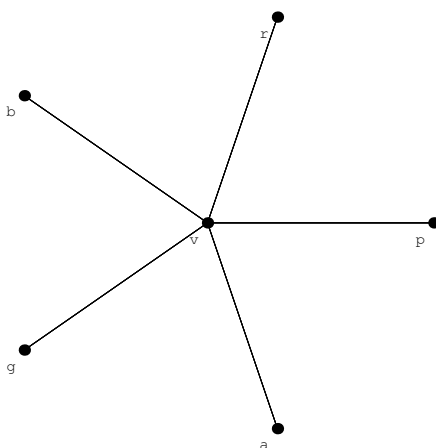


Abbildung 3.31: Die Ecke  $v$  und ihre fünf Nachbarn

etwa die red (r) und amber (a) gefärbten Nachbarn. Wir betrachten Wege, die nur aus roten (r) oder bernsteinfarbenen (a) Ecken bestehen, beginnend bei den Nachbarn r bzw. a und machen eine Fallunterscheidung. Im ersten Fall sind alle r- und a-Ecken, die vom r-Nachbarn erreicht werden können, verschieden von denen, die vom a-Nachbarn aus erreicht werden können. Insbesondere gibt es dann keinen Weg vom r-Nachbarn zum a-Nachbarn, der aus (natürlich abwechselnd) roten und bernsteinfarbenen Nachbarn besteht. In diesem Fall vertausche man einfach die Farben derjenigen Ecken, die vom r-Nachbarn aus auf einem r-a-Weg erreicht werden kann und färbe anschließend  $v$  rot. Diesen Fall veranschaulichen wir in Abbildung 3.32. Im zweiten Teil gibt es einen r-a-Weg vom r-Nachbarn zum a-Nachbarn. Ein Vertauschen der Farben würde nichts nützen, da  $v$  dann nach wie vor einen r- und einen a-Nachbarn hätte. Andererseits kann es keinen Weg aus violetten (p) und grünen (g) Ecken vom p-Nachbarn zum g-Nachbarn geben, da sonst der r-a-Weg gekreuzt werden müsste. Daher kann man im

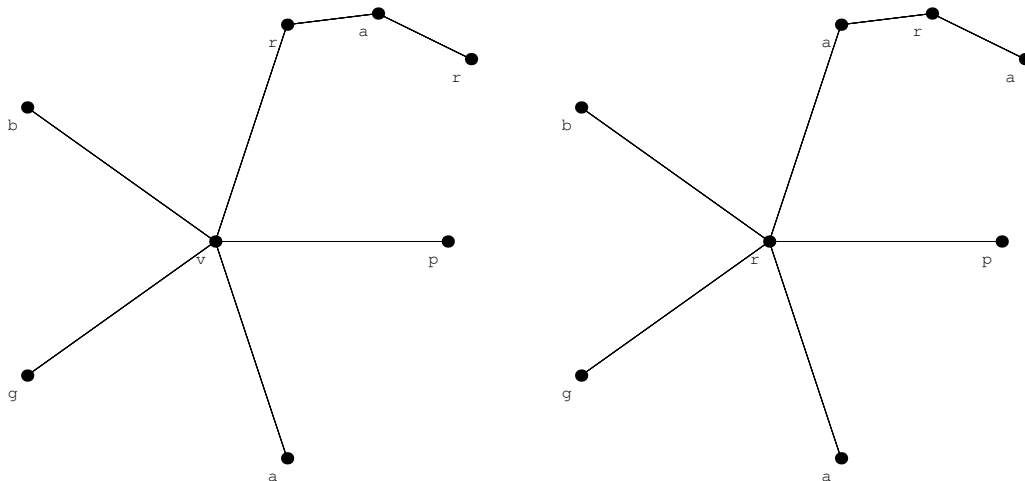


Abbildung 3.32: Vertausche Farben r und a für vom r-Nachbarn ausgehende r-a-Wege

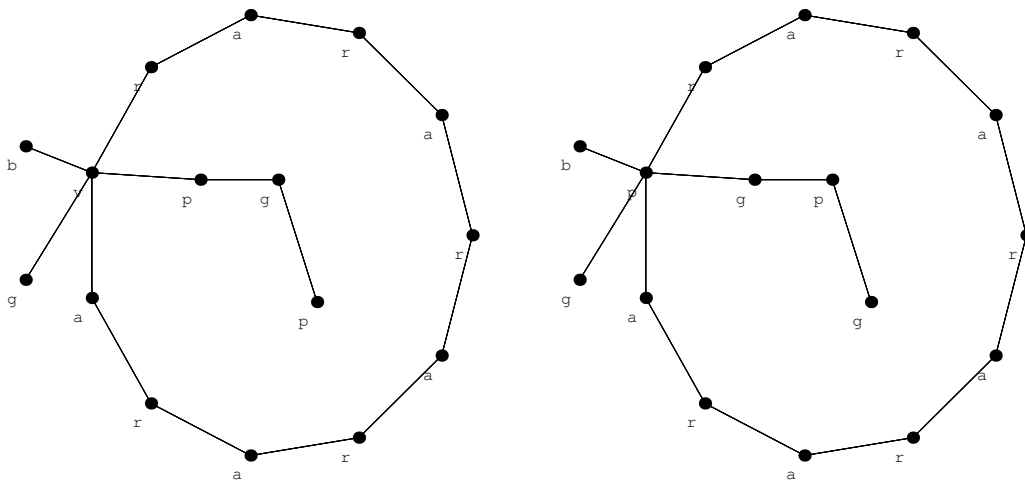


Abbildung 3.33: Vertausche green (g) und purple (p) rechts, färbe v mit p

p-g-Weg von  $v$  über den p-Nachbarn die Farben purple (p) und green (g) vertauschen und anschließend die Ecke  $v$  mit der Farbe purple (p) färben, man hat den zweiten Fall also auf den ersten bezüglich eines anderen Farbpaares zurückgeführt. Dies ist in Abbildung 3.33 veranschaulicht. Insgesamt ist der Satz bewiesen.  $\square$

**Beispiel:** Ein<sup>17</sup> Unternehmen muss gewisse Chemikalien, nämlich genau sieben verschiedene Arten, lagern. Gewisse Chemikalien müssen von anderen getrennt werden, können aber durchaus mit anderen zusammen gelagert werden. In der folgenden Tabelle ist durch \* gekennzeichnet, dass entsprechende Chemikalien nur getrennt voneinander

<sup>17</sup>Auch hier folgen wir J. M. Aldous, R. J. Wilson (2000, S. 276).

gelagert werden können.

	A	B	C	D	E	F	G
A	—	*	*	*	—	—	*
B	*	—	*	*	*	—	*
C	*	*	—	*	—	*	—
D	*	*	*	—	—	*	—
E	—	*	—	—	—	—	—
F	—	—	*	*	—	—	*
G	*	*	—	—	—	*	—

Die Frage ist, wie man die Chemikalien lagern sollte, wobei man mit möglichst wenig Sonderlagern auskommen möchte. Wir definieren einen Graphen, dessen Ecken die sieben Chemikalien sind. Diese Ecken werden durch eine Kante verbunden, wenn die entsprechenden Chemikalien getrennt gelagert werden müssen, siehe Abbildung 3.34.

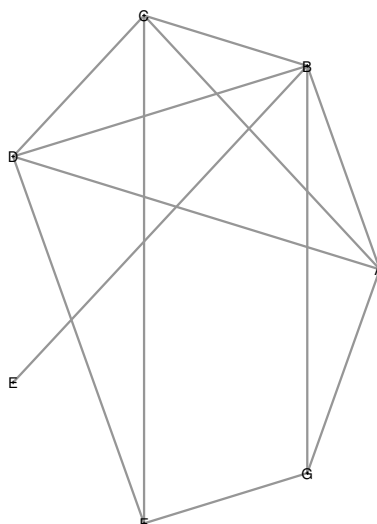


Abbildung 3.34: Unverträgliche Chemikalien

Dies ist kein planarer Graph. Denn dieser Graph enthält den bipartiten, vollständigen Graphen  $K_{3,3}$  mit den Ecken  $\{A, B, F\}$  und  $\{C, D, G\}$  und dieser ist bekanntlich nicht planar. Mögliche Aufteilungen sind  $\{A, E\}$ ,  $\{B, F\}$ ,  $\{C, G\}$ ,  $\{D\}$  oder  $\{A, E\}$ ,  $\{B, F\}$ ,  $\{C\}$ ,  $\{D, G\}$ . Hier haben wir also einen nichtplanaren Graphen, dessen Ecken durch vier Farben so gefärbt werden können, dass benachbarte Ecken unterschiedliche Farben haben. Da eine entsprechende Färbung mit drei Farben nicht möglich ist, sagt man, der Graph habe die chromatische Zahl 4. Die Aussage des *Vierfarbensatzes* ist es, dass jeder zusammenhängende, planare Graph eine chromatische Zahl  $\leq 4$  besitzt. Für nichtplanare Graphen ist das natürlich i. Allg. nicht richtig, denn z. B. hat der vollständige Graph  $K_n$  die chromatische Zahl  $n$ . Die Bestimmung der chromatischen Zahl eines gegebenen Graphen ist ein schwieriges Problem, auf das wir nicht eingehen können.  $\square$

### 3.3.5 Aufgaben

1. Sei  $G = (V, E)$  ein zusammenhängender, planarer Graph, bei dem alle Länder Dreiecke sind, also von genau drei Kanten berandet werden. Man zeige, dass dann  $|E| = 2|V| - 6$ .
2. Ist der in Abbildung 3.35 angegebene Graph planar?

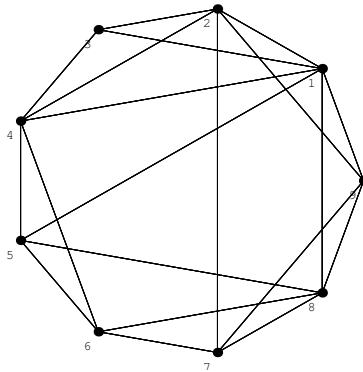


Abbildung 3.35: Ist dieser Graph planar?

3. Sei  $G = (V, E)$  ein zusammenhängender, planarer Graph mit  $n := |V| \geq 5$  Ecken,  $m := |E|$  Kanten, ferner habe jeder Kreis eine Länge  $\geq 5$ . Man zeige:
  - (a) Es ist  $m \leq \frac{5}{3}(n - 2)$ .
  - (b) Der in Abbildung 3.36 dargestellte Petersen-Graph ist nicht planar.

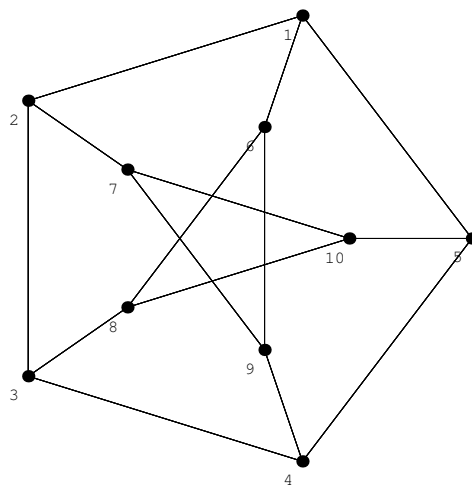


Abbildung 3.36: Der Petersen-Graph ist nicht planar

- (c) Man bestimme eine Eckenfärbung des Petersen-Graphen mit möglichst wenig Farben, wobei natürlich benachbarte Ecken unterschiedliche Farben haben sollen.
4. Sei  $G = (V, E)$  ein Graph mit  $d := \max_{x \in V} d(x)$ , wobei  $d(x)$  den Grad der Ecke  $x \in V$  bedeutet. Dann ist die chromatische Zahl von  $G$  kleiner oder gleich  $d + 1$ . D. h. es

ist eine Färbung der Ecken von  $G$  durch höchstens  $d + 1$  Farben derart möglich, dass benachbarte Ecken verschieden gefärbt sind.

5. Zehn Personen  $A, B, \dots, I, J$  sind in acht Kommissionen  $1, \dots, 8$  vertreten. In der folgenden Tabelle 3.2 wird die Zusammensetzung der Kommissionen angegeben: Z.B. hat

	$A$	$B$	$C$	$D$	$E$	$F$	$G$	$H$	$I$	$J$
1	*	*	*	*						
2	*		*	*	*					
3		*		*		*	*			
4			*			*	*	*		
5	*							*		*
6								*	*	*
7							*	*		*
8					*				*	

Tabelle 3.2: Zusammensetzung der Kommissionen

die Kommission 4 die Mitglieder  $C, F, G, H$ . Zwei Kommissionen können nicht am selben Tag tagen, wenn sie ein gemeinsames Mitglied haben. Man bestimme die minimale Zahl von Tagen, in denen sich alle Kommissionen zu einer Sitzung treffen können.

6. Bisher hatten wir uns nur mit dem *Eckenfärbungsproblem* für einen Graphen  $G = (V, E)$  beschäftigt. Die *chromatische Zahl*  $\chi(G)$  ist die minimale Anzahl der Farben, um die Ecken von  $G$  so zu färben, dass benachbarte Ecken unterschiedlich gefärbt sind. Entsprechend kann man auch das *Kantenfärbungsproblem* für einen Graphen  $G = (V, E)$  betrachten. Der *chromatische Index*  $\chi'(G)$  ist die minimale Anzahl von Farben, um die Kanten von  $G$  so zu färben, dass Kanten, die eine gemeinsame Ecke haben, unterschiedlich gefärbt sind.

Man zeige, dass  $\chi'(K_4) = 3$  und  $\chi'(K_5) = 5$ . Hierbei bezeichne  $K_4$  bzw.  $K_5$  den vollständigen Graphen mit 4 bzw. 5 Ecken.