

Kapitel 6

Partielle Differentialgleichungen

Diesmal definieren¹ wir schon zu Beginn des Kapitels, was wir unter einer partiellen Differentialgleichung verstehen.

- Eine *partielle Differentialgleichung* ist eine Gleichung, welche Ableitungen einer gesuchten Funktion $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ enthält, wobei Ω eine offene Teilmenge des \mathbb{R}^d , $d \geq 2$, ist.

Ganz wichtig hierbei ist, dass eine Funktion von *mehr* als einer unabhängigen Variablen gesucht ist. Die auftretenden Ableitungen der gesuchten Funktion sind daher partielle Ableitungen. Eine der Variablen hat häufig den Charakter der Zeit², die anderen haben dann “Ortscharakter”. Bei gewissen (stationären) Problemen können aber auch alle Variable Ortsvariable (in der Ebene oder dem Raum) sein.

Um es einfach zu sagen: Partielle Differentialgleichungen sind wesentlich schwieriger als gewöhnliche. Daher ist es noch verwegener, eine kurze Einführung in Theorie und Praxis partieller Differentialgleichungen zu geben. Die folgenden Bemerkungen sollen nur einen ganz kleinen Einblick in dieses außerordentlich interessante und gerade für Anwendungen besonders wichtige Gebiet geben. Hierbei werden wir uns auf die Prototypen partieller Differentialgleichungen, nämlich die Wärmeleitungsgleichung (oder auch Diffusionsgleichung) für die Klasse parabolischer Gleichungen, die Wellengleichung für die Klasse hyperbolischer Gleichungen und schließlich die Laplace-Gleichung für die Klasse elliptischer Gleichungen, beschränken. Eine Schwierigkeit besteht darin, dass zu ihrer Herleitung Kenntnisse aus der Physik nötig sind. Trotzdem wollen wir versuchen, die entsprechenden Gleichungen, die ja mathematische Modelle für gewisse physikalische Prozesse sind, einigermaßen korrekt abzuleiten.

Auch in diesem Kapitel werden wir möglichst oft, nicht nur für Visualisierungszwecke, das mathematische Anwendersystem *Mathematica*³ benutzen.

¹Siehe

J. JOST (1998) *Partielle Differentialgleichungen*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York.

²Quid est ergo tempus? Si nemo ex me quaerat, scio. Si quaerenti explicare velim, nescio (Augustinus, Confessiones Liber XI).

³Schon am Schluss der Einführung hatten wir erwähnt, dass dieses Kapitel über partielle Differentialgleichungen aus einer Vorlesung aus dem Jahre 2000 stammt, in welcher das Anwendersystem Mathematica zugrunde gelegt war.

6.1 Die Wärmeleitungsgleichung

6.1.1 Herleitung

Wir betrachten⁴ zunächst ein (im Ort) eindimensionales Problem, und zwar einen Stab der Länge L , dessen Seitenflächen vollständig wärmeundurchlässig sind. Dieser Stab kann erwärmt werden, er sei aber in dem Sinne eindimensional, dass seine Temperatur in jedem Querschnitt konstant ist (aber natürlich von Querschnitt zu Querschnitt variiert). Mit $u(x, t)$ bezeichnen wir die Temperatur des Stabes in der Position x zur Zeit t . Die *spezifische Wärme* c eines gewissen Materials ist die Wärmemenge, die einer Masseneinheit zugeführt werden muss, damit sich die Temperatur um eine Einheit erhöht, ihre Einheit ist cal/g·Grad. Die spezifische Wärme des Wassers⁵ ist $c = 1$. Wir nehmen an, dass die spezifische Wärme des Materials aus dem der Stab besteht (innerhalb der uns interessierenden Temperaturen) temperaturunabhängig ist, dass sie aber i. Allg. positionsabhängig ist. In der Position $x \in [0, L]$ sei die spezifische Wärme durch $c(x)$ gegeben, wobei wir später häufig auch noch annehmen werden, die spezifische Wärme des Stabmaterials sei konstant, also vom Ort unabhängig. Wegen

$$c(x) = \frac{\text{Wärmemenge}}{\text{Masse} \cdot \text{Temperatur}}$$

ist $c(x)u(x, t)$ die Wärmemenge pro Masseneinheit, diese wird i. Allg. nicht konstant sein. Wir betrachten ein kleines Volumenstück des Stabes zwischen den Positionen x und $x + \Delta x$. Wir nehmen an, in diesem kleinen Teil des Stabes sei die Wärmemenge pro Masseneinheit $c(\cdot)u(\cdot, t)$ konstant. Als Wärmemenge in diesem Scheibchen des Stabes erhält man also die Masse der Scheibe multipliziert mit der Wärmemenge pro Masseneinheit. Es wird die *Massendichte*, die Masse pro Volumeneinheit eingeführt:

$$\rho(x) = \text{Massendichte} = \frac{\text{Masse}}{\text{Volumen}},$$

wobei die Abhängigkeit vom Ort zugelassen wird, um auch inhomogene Materialien zu erfassen. Ist die Fläche des Stabquerschnitts (in dem betrachteten Stück) A , so ist das Volumen dieses Stücks gerade $A\Delta x$. Daher ist

$$\text{Wärmemenge} = \rho(x)A\Delta x c(x)u(x, t)$$

die im Stabstück enthaltene Wärmemenge. Haben wir nun kein infinitesimales, sondern ein endliches Stabstück $[a, b] \subset [0, L]$, so ist die hierin enthaltene Wärmemenge durch $\int_a^b c(x)\rho(x)u(x, t)A dx$, die Summe der Beiträge der infinitesimalen Stückchen, gegeben. Nun ist die Änderung der Wärmemenge in dem endlichen Stabstück pro Zeiteinheit gleich der Wärmemenge, welche über den Rand (also für $x = a$ und $x = b$) pro

⁴Wir folgen im wesentlichen der Darstellung bei

R. HABERMAN (1983) *Elementary Applied Partial Differential Equations*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs.

⁵Nach Gerthsen gilt: Man nennt die Wärmemenge, die 1 g Wasser um 1°C (genau genommen von 14.5°C auf 15.5°C) erwärmt, eine (kleine) *Kalorie* oder Grammkalorie (1 cal).

Zeiteinheit ein- oder austritt plus der Wärmemenge, die im Innern pro Zeiteinheit erzeugt wird. In Formeln (nach Division mit der Konstanten A):

$$(*) \quad \frac{d}{dt} \int_a^b c(x)\rho(x)u(x,t) dx = \phi(a,t) - \phi(b,t) + \int_a^b Q(x,t) dx.$$

Hierbei ist $\phi(x,t)$ die Wärmemenge, die in der Position x pro Flächeneinheit dem Stabstück zugeführt wird (ist $\phi(x,t)$ negativ, so wird Wärmemenge nach links abgeführt), weiter ist $Q(x,t)$ die Wärmemenge, die pro Volumeneinheit und Zeiteinheit im Stabstück erzeugt wird. Nun kann man (unter vernünftigen Glattheitsannahmen) $(*)$ auch in der Form

$$\int_a^b \left(c(x)\rho(x) \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + \frac{\partial \phi}{\partial x}(x,t) - Q(x,t) \right) dx = 0$$

schreiben. Dieses gilt für beliebige a und b , was dann auf

$$c(x)\rho(x) \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = -\frac{\partial \phi}{\partial x}(x,t) + Q(x,t)$$

führt. Nach dem Wärmeleitungsgesetz von Fourier ist

$$\phi(x,t) = -K_0(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$$

mit einer positiven, eventuell vom Ort x abhängenden Konstanten K_0 , der Wärmeleitfähigkeit. Der Wärmefluss ist also proportional zur Temperaturdifferenz pro Einheitslänge. Das Minus-Zeichen erklärt sich folgendermaßen: Wächst die Temperatur mit x , wird es also nach rechts im Stab wärmer, so ist $\partial u/\partial x > 0$, so fließt die Wärme nach links, d. h. ϕ ist negativ. Einsetzen liefert

$$c(x)\rho(x) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K_0(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + Q(x,t).$$

Hierbei ist die Wärmequelle gegeben, die vom Material abhängenden Funktionen (oder Konstanten) c , ρ und K_0 bekannt, gesucht ist die Temperatur $u(x,t)$ in x zur Zeit t . Ist $Q = 0$ und sind c, ρ, K_0 konstant, so erhält man mit $\sigma := K_0/(c\rho)$ die sogenannte Wärmeleitungs- oder Diffusionsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sigma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Durch diese Gleichung alleine ist die Temperatur im Ort x zur Zeit t natürlich nicht bestimmt. Wir benötigen noch eine Anfangsverteilung

$$u(x,0) = \phi(x)$$

und Informationen, was an den Stabenden, also für $x = 0$ und $x = L$ passiert. Die Aufgabenstellung kann so beschaffen sein, dass die Temperatur an einem der (oder beiden) Stabenden fest gegeben ist, dass also z. B. $u(0,t)$ für alle $t \in (0, T)$ (hier kann die "Endzeit" T auch gleich $+\infty$ sein) vorgegeben ist. Denkbar ist aber auch, dass der

Wärmefluss an den Stabenden gegeben ist, also $u_x(0, t)$ (wir benutzen in Zukunft häufig diese kürzere Schreibweise für partielle Ableitungen) oder $u_x(L, t)$. Bei vollständiger Isolierung am linken Stabende hätte man z. B. die Randbedingung $u_x(0, t) = 0$ für alle $t \in (0, T)$. Ferner ist eine Mischung aus beiden Typen von Randbedingungen denkbar, worauf wir hier aber nicht mehr eingehen wollen.

Wir haben die Wärmeleitungsgleichung nur für den Fall einer Ortsvariablen hergeleitet. Natürlich gibt es ein Analogon in der Ebene oder im Raum. Man denke etwa an ein Zimmer, dessen Temperaturverteilung (d. h. die Temperatur in jedem Punkt des Raumes) zu einer Anfangszeit bekannt ist. An den Wänden befinden sich (eventuell zeitlich variable) Heizquellen, gefragt wird nach der Temperaturverteilung im Raum in der Zukunft. Auf die entsprechende Herleitung der Wärmeleitungsgleichung wollen wir nicht eingehen⁶. Das d -dimensionale Analogon zur eindimensionalen Wärmeleitungsgleichung ist das folgende. Gegeben sei eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, deren Rand mit $\partial\Omega$ bezeichnet wird. Gegeben sei ferner eine Anfangstemperaturverteilung ϕ , genauer eine stetige Abbildung $\phi: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ (hierbei bezeichne $\bar{\Omega}$ den Abschluss bzw. die abgeschlossene Hülle von Ω) und eine stetige Abbildung $f: \partial\Omega \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}$, die Temperaturverteilung am Rand von Ω . Gesucht ist bei vorgegebenem $\sigma > 0$ eine Lösung u von

$$u_t = \sigma \Delta u \quad \text{in } \Omega \times (0, T),$$

welche der Anfangsbedingung

$$u(x, 0) = \phi(x), \quad x \in \bar{\Omega}$$

und der Randbedingung

$$u(x, t) = f(x, t), \quad (x, t) \in \partial\Omega \times [0, T)$$

genügt. Hierbei ist Δ der auf die Ortsvariable wirkende *Laplace-Operator*, d. h. für $v \in C^2(\Omega)$ ist

$$\Delta v = \sum_{j=1}^d \frac{\partial^2 v}{\partial x_j^2}.$$

Gesucht wird also eine Funktion $u \in C(\bar{\Omega} \times [0, T))$ mit den folgenden Eigenschaften:

- Für jedes feste $t \in (0, T)$ ist $u(\cdot, t) \in C^2(\Omega)$, für jedes feste $x \in \Omega$ ist $u(x, \cdot) \in C^1(0, T)$ und es ist $u_t(x, t) = \sigma \Delta u(x, t)$ für alle $(x, t) \in \Omega \times (0, T)$.
- Es ist $u(x, 0) = \phi(x)$ für alle $x \in \bar{\Omega}$.
- Es ist $u(x, t) = f(x, t)$ für alle $(x, t) \in \partial\Omega \times [0, T)$.

Denkbar sind natürlich auch andere Randbedingungen.

⁶Siehe z. B. das schon oben genannte Buch von R. Haberman (1983, S. 17 ff.).

6.1.2 Ein Beispiel

Mit⁷ konstantem $\sigma > 0$ sei in $(0, \pi) \times (0, \infty)$ (wir nehmen also die Endzeit $T = \infty$) eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung $u_t = \sigma u_{xx}$ gesucht, die für $x \in [0, \pi]$ bei gegebenem $C > 0$ der Anfangsbedingung

$$u(x, 0) = \phi(x) := \begin{cases} x, & x \in [0, \frac{1}{2}\pi], \\ (\pi - x), & x \in [\frac{1}{2}\pi, \pi] \end{cases}$$

genügt sowie für $t \in (0, \infty)$ den beiden Randbedingungen $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$. In Abbildung 6.1 ist die Anfangstemperaturverteilung angegeben, wobei der Plot durch

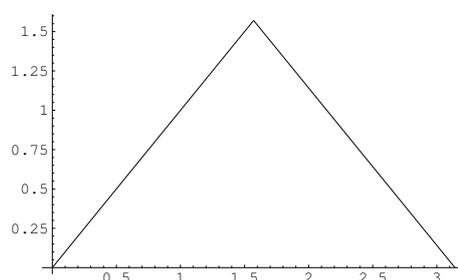


Abbildung 6.1: Anfangstemperaturverteilung

```
phi[x_] := If[x <= Pi/2, x, Pi - x];
Plot[phi[x], {x, 0, Pi}]
```

erfolgte. Wir geben zwei Methoden zur Berechnung der Lösung dieser Anfangsrandwertaufgabe für die Wärmeleitungsgleichung an.

In der ersten Methode geben wir eine Fourier-Entwicklung der Lösung an. Zunächst besteht die Idee aber darin, eine *Trennung der Veränderlichen* vorzunehmen und danach das *Superpositionsprinzip* auszunutzen. Wir können bei diesem Ansatz relativ skrupellos vorgehen, denn es kommt nur darauf an, einen *Lösungskandidaten* zu bestimmen. Dass es sich bei diesem Lösungskandidaten wirklich um eine Lösung handelt, eventuell sogar um die einzige, muss im Anschluss gezeigt werden. Setzen wir den Ansatz $u(x, t) = X(x)T(t)$ für eine Lösung in die Differentialgleichung ein, so erhalten wir

$$\frac{1}{\sigma} \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

⁷Dieses Beispiel haben wir einem der klassischen Lehrbücher über die numerische Behandlung von Anfangswertaufgaben bei partiellen Differentialgleichungen entnommen, nämlich

R. D. RICHTMYER, K. W. MORTON (1967) *Difference methods for initial-value problems*. Interscience Publishers, New York-London-Sidney.

mit einer Konstanten λ , da die linke Seite der Gleichung nur von t , die rechte dagegen nur von x abhängt. Die Randbedingungen ergeben $X(0) = X(\pi) = 0$, so dass X und T aus

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = X(\pi) = 0,$$

bzw.

$$T' = -\sigma\lambda T$$

zu berechnen sind. Die erste Aufgabe besitzt für $\lambda \leq 0$ nur die triviale Lösung. Denn ist $\lambda \leq 0$ und X eine Lösung, so ist

$$0 \leq -\lambda \int_0^\pi X^2(x) dx = \int_0^\pi X''(x)X(x) dx = \underbrace{X(x)X'(x)|_0^\pi}_{=0} - \int_0^\pi X'^2(x) dx.$$

Hieraus folgt, dass X' identisch verschwindet, X also konstant ist. Wegen der Randbedingungen verschwindet X selber identisch. Für $\lambda > 0$ ist die allgemeine Lösung von $X'' + \lambda X = 0$ durch

$$X(x) = c_1 \sin \sqrt{\lambda}x + c_2 \cos \sqrt{\lambda}x$$

gegeben. Aus der Randbedingung $X(0) = 0$ erhält man $c_2 = 0$. Für eine nichttriviale Lösung ist $c_1 \neq 0$. Die zweite Randbedingung $X(\pi) = 0$ ergibt die Bedingung $\sin \sqrt{\lambda}\pi = 0$ bzw. $\lambda = k^2$ mit $k \in \mathbb{N}$. Definiert man also

$$u_k(x, t) := \sin kx \exp(-\sigma k^2 t), \quad k \in \mathbb{N},$$

so ist u_k eine nichttriviale Lösung der Wärmeleitungsgleichung, welche den homogenen Randbedingungen genügt. Das gleiche gilt noch für jede Linearkombination der u_k bzw. für $u(x, t) = \sum_{k=1}^\infty c_k u_k(x, t)$, wenn die Konvergenz der Reihe so ist, dass Differentiation und Limesbildung miteinander vertauscht werden dürfen. Hieran erkennt man, dass die c_k so gewählt werden sollten, dass

$$\phi(x) = \sum_{k=1}^\infty c_k \sin kx.$$

Wegen

$$\int_0^\pi \sin kx \sin lx dx = \frac{1}{2} \int_0^\pi [\cos(k-l)x - \cos(k+l)x] dx = \begin{cases} 0, & k \neq l, \\ \frac{\pi}{2}, & k = l, \end{cases}$$

ist

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^\infty \sin kx \exp(-\sigma k^2 t) \quad \text{mit} \quad c_k := \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \phi(x) \sin kx dx$$

Lösungskandidat. Nun nutzen wir die spezielle Definition von ϕ aus und erhalten

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \phi(x) \sin kx dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\pi/2} x \sin kx dx + \int_{\pi/2}^\pi (\pi - x) \sin kx dx \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{\pi} [1 + (-1)^{n+1}] \int_0^{\pi/2} x \sin kx \, dx \\
&= \begin{cases} 0, & k \text{ gerade,} \\ \frac{4}{\pi k^2} (-1)^{(k-1)/2}, & k \text{ ungerade.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Damit haben wir

$$u(x, t) = \frac{4}{\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)^2} \sin(2j+1)x \exp(-\sigma(2j+1)^2 t)$$

als Lösungskandidaten erhalten. In Abbildung 6.2 haben wir Approximationen für die Anfangstemperaturverteilung angegeben, nämlich

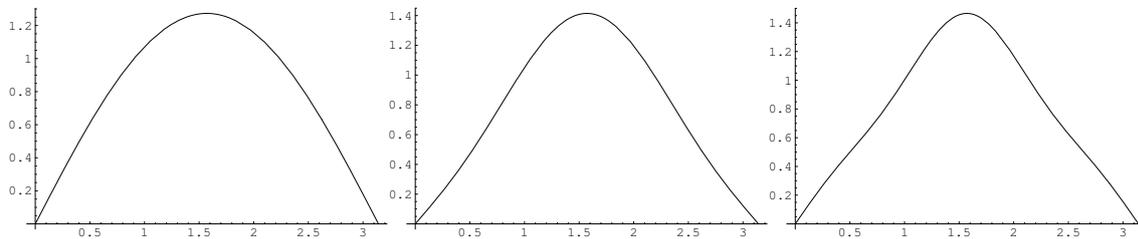


Abbildung 6.2: Approximation ϕ_J , $J = 0, 1, 2$, an die Anfangstemperaturverteilung

$$\phi_J(x) := \frac{4}{\pi} \sum_{j=0}^J \frac{(-1)^j}{(2j+1)^2} \sin(2j+1)x$$

für $J = 0, 1, 2$. Mit

```
phi10[x_] := (4/Pi) Sum[(-1)^j/(2j+1)^2 Sin[(2j+1) x], {j, 0, 10}]
Plot[phi10[x], {x, 0, Pi}]
```

könnte man z. B. ϕ_{10} plotten. Durch

```
u10[x_, t_] := (4/Pi) Sum[(-1)^j/(2j+1)^2 Sin[(2j+1)*x] Exp[-(2j+1)^2*t],
  {j, 0, 10}]
Plot3D[u10[x, t], {x, 0, Pi}, {t, 0, 1},
  AxesLabel -> {"Ort", "Zeit", "Temperatur"}]
```

erzeugen wir den in Abbildung 6.3 angegebenen Plot, in welchem die Temperaturverteilung über das Zeitintervall $[0, 1]$ angegeben ist.

Nun sollte man sich überlegen, dass

$$u(x, t) := \frac{4}{\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)^2} \sin(2j+1)x \exp(-\sigma(2j+1)^2 t)$$

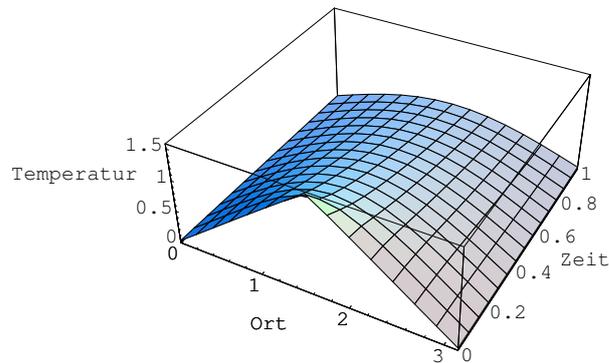


Abbildung 6.3: Temperaturverteilung $u(x, t)$ für $(x, t) \in [0, \pi] \times [0, 1]$

nicht nur ein Lösungskandidat, sondern wirklich eine *Lösung* der gestellten Anfangsrandwertaufgabe bei der Wärmeleitungsgleichung ist. Offensichtlich macht die Konvergenz der Reihe überhaupt keine Probleme, so dass die Funktion u auf $[0, \pi] \times [0, \infty)$ wohldefiniert ist. Die (homogenen) Randbedingungen sind erfüllt. Wir müssen uns jetzt überlegen, dass auch die Anfangsbedingung erfüllt ist, d. h. die Beziehung

$$\frac{4}{\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)^2} \sin(2j+1)x = \phi(x)$$

auf $[0, \pi]$ gilt. Hierzu denken wir uns ϕ ungerade auf $[-\pi, \pi]$ und anschließend 2π -periodisch auf ganz \mathbb{R} fortgesetzt. Auch diese Funktion nennen wir ϕ . Dann ist die links stehende Reihe gerade die Fourierreihe von ϕ (siehe auch Aufgabe 1). Da ϕ stetig, stückweise stetig differenzierbar und periodisch ist, konvergiert⁸ die Fourierreihe von ϕ gleichmäßig gegen ϕ . Also nimmt der Lösungskandidat die richtigen Anfangswerte an. In $(0, \pi) \times (0, \infty)$ ist u schließlich eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung, da man in der Darstellung von u offenbar gliedweise differenzieren darf.

Bemerkung: Mit der eben angegebenen Methode kann man allgemein für ein $\phi \in C^2[0, \pi]$ mit $\phi(0) = \phi(\pi) = 0$ die Existenz einer Lösung der Wärmeleitungsgleichung mit Anfangstemperaturverteilung ϕ und homogenen Randbedingungen sichern. Auch die *Eindeutigkeit* einer Lösung ist gesichert. Hierzu muss man zeigen, dass eine Lösung u des homogenen Problems notwendigerweise trivial ist. Nun ist (multipliziere

⁸Siehe z. B.

O. FORSTER (1983) *Analysis 1*. 4., durchgesehene Auflage. Vieweg, Braunschweig-Wiesbaden.

Wärmeleitungsgleichung mit u)

$$\int_0^\pi u(x, t) u_t(x, t) dx = \sigma \int_0^\pi u(x, t) u_{xx}(x, t) dx = \sigma \underbrace{u(x, t) u_x(x, t)}_{=0} \Big|_0^\pi - \sigma \int_0^\pi u_x^2(x, t) dx.$$

Insbesondere ist $\int_0^\pi u(x, t) u_t(x, t) \leq 0$ für alle t . Eine Integration über $[0, T]$ mit beliebigem $T > 0$ liefert

$$\begin{aligned} 0 &\geq \int_0^T \int_0^\pi u(x, t) u_t(x, t) dx dt \\ &= \int_0^\pi \int_0^T \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} u^2(x, t) dt dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi u^2(x, t) \Big|_0^T dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi u^2(x, T) dx, \end{aligned}$$

wobei wir am Schluss die homogene Anfangsbedingung $u(x, 0) = 0$ benutzt haben. Insgesamt folgt $u = 0$ bzw. die Eindeutigkeit einer Lösung für die Anfangsrandwertaufgabe bei der Wärmeleitungsgleichung. \square

Es ist klar, dass die eben angegebene Methode nur begrenzt eingesetzt werden kann. Wir erläutern jetzt die Idee der wesentlich flexibleren Differenzenverfahren. Diese besteht darin, die (partiellen) Ableitungen in der Differentialgleichung durch Differenzenquotienten zu ersetzen. Hierzu wird $(0, \pi) \times (0, \infty)$ mit einem Gitter mit den Gitterpunkten $(j\Delta x, k\Delta t)$ überzogen, wobei $\Delta x = \pi/J$ mit $J \in \mathbb{N}$. In Abbildung 6.4 ist

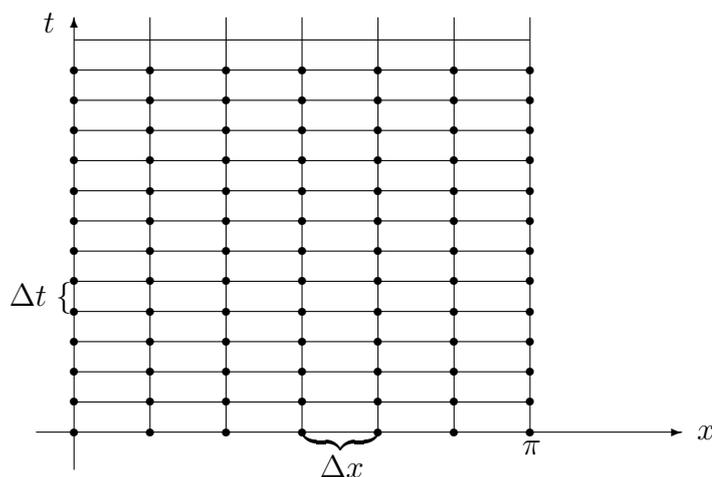


Abbildung 6.4: Ein Gitter

ein solches Gitter eingetragen. Mit u_j^k bezeichnen wir eine Näherung für $u(j\Delta x, k\Delta t)$, also die Lösung im Ort $j\Delta x$, $j = 0, \dots, J$, zur Zeit $k\Delta t$, $k = 0, 1, \dots$. Die einfachste Approximation an die Wärmeleitungsgleichung $u_t = \sigma u_{xx}$ erhalten wir, wenn wir

$u_t(j\Delta x, k\Delta t)$ durch einen vorwärts genommenen, $u_{xx}(j\Delta x, k\Delta t)$ durch einen zentralen Differenzenquotienten ersetzen, also

$$u_t(j\Delta x, k\Delta t) \approx \frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\Delta t},$$

$$u_{xx}(j\Delta x, k\Delta t) \approx \frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{(\Delta x)^2}.$$

Durch Eingabe von

```
f[h_]=(u[x+h]-2u[x]+u[x-h])/h^2;
Series[f[h],{h,0,3}]
```

erhält man z. B. den Output

$$u''[x] + \frac{1}{12}u^{(4)}[x]h^2 + O[h]^4.$$

Das diskrete Analogon zur Wärmeleitungsgleichung lautet also

$$u_j^{k+1} - u_j^k = \frac{\sigma\Delta t}{(\Delta x)^2}(u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k).$$

Hinzu kommt die Anfangsbedingung

$$u_j^0 = \phi(j\Delta x), \quad j = 0, \dots, J,$$

und die Randbedingung

$$u_0^k = u_J^k = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Man sieht, dass man bei diesem *expliziten* Verfahren die Werte der Näherung für die $(k+1)$ -te Zeitstufe direkt aus denen der k -ten Zeitstufe bestimmen kann. Dies ist bei einem *impliziten* Verfahren anders. Zu dem bekanntesten impliziten Verfahren für Anfangsrandwertaufgaben für die Wärmeleitungsgleichung, dem Crank-Nicholson-Verfahren, kommt man folgendermaßen. Man kombiniere ein explizites und ein implizites Verfahren konvex. In

$$u_j^{k+1} - u_j^k = \frac{\sigma\Delta t}{(\Delta x)^2}(u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k),$$

$$u_j^{k+1} - u_j^k = \frac{\sigma\Delta t}{(\Delta x)^2}(u_{j+1}^{k+1} - 2u_j^{k+1} + u_{j-1}^{k+1})$$

multipliziere man mit einem $\theta \in [0, 1]$ (als Crank-Nicholson-Verfahren wird häufig nur das Verfahren bezeichnet, bei welchem $\theta = \frac{1}{2}$) die erste Gleichung mit $(1-\theta)$, die zweite mit θ und addiere sie anschließend. Setzt man zur Abkürzung $\kappa := \sigma\Delta t/(\Delta x)^2$, so erhält man also

$$u_j^{k+1} - u_j^k = \kappa[(1-\theta)(u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k) + \theta(u_{j+1}^{k+1} - 2u_j^{k+1} + u_{j-1}^{k+1})]$$

bzw. nach Umordnen (Werte der $(k+1)$ -ten Zeitstufe nach links, die zur k -ten nach rechts)

$$-\theta\kappa u_{j-1}^{k+1} + (1 + 2\theta\kappa)u_j^{k+1} - \theta\kappa u_{j+1}^{k+1} = u_j^k + (1 - \theta)\kappa(u_{j-1}^k - 2u_j^k + u_{j+1}^k).$$

Berücksichtigt man die Randbedingungen, so erkennt man, dass es sich hier um ein lineares Gleichungssystem von $J-1$ Gleichungen für ebenso viele Unbekannte handelt. Die Koeffizientenmatrix ist offenbar

$$A = \begin{pmatrix} 1 + 2\theta\kappa & -\theta\kappa & \cdots & 0 \\ -\theta\kappa & 1 + 2\theta\kappa & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -\theta\kappa \\ 0 & \cdots & -\theta\kappa & 1 + 2\theta\kappa \end{pmatrix},$$

eine sogenannte *Tridiagonalmatrix*. Dass diese Tridiagonalmatrix besonders angenehme Eigenschaften besitzt, kann in Aufgabe 2 nachgewiesen werden. In Aufgabe 3 wird formuliert, wie ein lineares Gleichungssystem mit A als Koeffizientenmatrix effizient gelöst werden kann. In einfacher Weise erhält man also die gesuchten Werte

$$u^{k+1} = (u_1^{k+1}, \dots, u_{J-1}^{k+1})^T$$

als Lösung des linearen Gleichungssystems $Au^{k+1} = b^k$, wobei $b^k = (b_j^k)$ und

$$b_j^k := u_j^k + (1 - \theta)\kappa(u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k), \quad j = 1, \dots, J-1.$$

In Aufgabe 4 wird dazu aufgefordert, ein Programm hierzu zu schreiben und es etwa auf das obige Beispiel anzuwenden. Es stellt sich heraus, dass es wesentlich auf die Größe von $\kappa := \sigma\Delta t / (\Delta x)^2$ ankommt. Hierauf wollen wir im nächsten Unterabschnitt noch etwas genauer eingehen.

6.1.3 Stabilität

Wir beginnen mit einem Beispiel, welches scheinbar nichts mit dem hier eigentlich zu besprechenden Stoff zu tun hat.

Beispiel: Die zeitliche Entwicklung einer Population (etwa einer Insektenart), die aus maximal dreijährigen Individuen besteht, soll untersucht werden. Mit x_k , y_k bzw. z_k wird die Anzahl der Individuen bezeichnet, die im Jahre k im ersten, zweiten bzw. dritten Lebensjahr sind. Die Vermehrung erfolge nach folgender Gesetzmäßigkeit.: Die Individuen im ersten Lebensjahr haben keine Nachkommen, die im zweiten je einen und die im dritten je zwei. Überleben und Tod werden durch das folgende Gesetz beschrieben: Die Hälfte der Individuen im ersten Lebensjahr wird älter als ein Jahr, ein Drittel der Individuen im zweiten Lebensjahr wird älter als zwei Jahre, spätestens im dritten Lebensjahr sterben alle.

Wir formulieren nun den Übergang $(x_k, y_k, z_k) \longrightarrow (x_{k+1}, y_{k+1}, z_{k+1})$ als Matrix-Vektor-Operation und untersuchen anschließend, ob es zu einer Bevölkerungsexplosion

(instabil) oder zum Aussterben bzw. Konvergenz gegen einen stationären Zustand (stabil) kommen wird.

Offenbar ist

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \\ z_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}^{k+1} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}.$$

Es stellt sich heraus, dass die Frage nach Stabilität und Instabilität von den Eigenwerten der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

abhängt. Am besten benutzt man einmal wieder *Mathematica*, um Eigenwerte und zugehörige Eigenvektoren von A zu erhalten. Durch

```
a={0,1,2},{1/2,0,0},{0,1/3,0}
{werte,vektoren}=N[Eigensystem[a]]
```

erhält man die Eigenwerte

$$\lambda_1 = 0.927113, \quad \lambda_{2,3} = -0.463557 \pm 0.380334i$$

mit zugehörigen (linear unabhängigen) Eigenvektoren

$$u_1 = \begin{pmatrix} 5.15723 \\ 2.78134 \\ 1.00000 \end{pmatrix}, \quad u_{2,3} = \begin{pmatrix} 0.42138 \mp 2.11568i \\ -1.39667 \pm 1.14100i \\ 1.00000 \end{pmatrix}.$$

Man beachte, dass alle drei Eigenwerte von A betragsmäßig kleiner als 1 sind. Daher wird es, unabhängig von der Anfangspopulation, zum Aussterben der Spezies kommen. Dies kann man folgendermaßen einsehen. Da die Vektoren u_1, u_2, u_3 linear unabhängig sind, läßt sich die Anfangspopulation als Linearkombination dieser Eigenvektoren darstellen. Es existieren also $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{C}$ mit

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3.$$

Dann ist

$$\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{pmatrix} = \lambda_1^k \alpha_1 u_1 + \lambda_2^k \alpha_2 u_2 + \lambda_3^k \alpha_3 u_3,$$

woraus man die Behauptung abliest, da die Eigenvektoren betragsmäßig kleiner als Eins sind. Wären sie betragsmäßig wenigstens kleiner oder gleich Eins, so könnte immer noch gesichert werden, dass die Population beschränkt bleibt, es also insbesondere nicht zu einer Bevölkerungsexplosion kommt. \square

Wir betrachten nun wieder die Anfangsrandwertaufgabe (mit homogenen Randbedingungen) für die Wärmeleitungsgleichung. Bei gegebenen $\sigma > 0$ und $\phi \in C[0, \pi]$ mit $\phi(0) = \phi(\pi) = 0$ ist also eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung in $(0, \pi) \times (0, \infty)$ gesucht, welche der Anfangsbedingung $u(x, 0) = \phi(x)$ auf $[0, \pi]$ und den homogenen Randbedingungen $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ für $t \geq 0$ genügt. Wir gehen wie am Schluss des letzten Unterabschnitts vor. Wir wählen also mit $J \in \mathbb{N}$ eine Ortsschrittweite $\Delta x := \pi/J$, eine Zeitschrittweite Δt und setzen $\kappa := \sigma \Delta t / (\Delta x)^2$. Weiter sei $\theta \in [0, 1]$ gewählt. Mit

$$A := \begin{pmatrix} 1 + 2\theta\kappa & -\theta\kappa & \cdots & 0 \\ -\theta\kappa & 1 + 2\theta\kappa & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -\theta\kappa \\ 0 & \cdots & -\theta\kappa & 1 + 2\theta\kappa \end{pmatrix}$$

und

$$B := \begin{pmatrix} 1 - 2\theta'\kappa & \theta'\kappa & \cdots & 0 \\ \theta'\kappa & 1 - 2\theta'\kappa & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \theta'\kappa \\ 0 & \cdots & \theta'\kappa & 1 - 2\theta'\kappa \end{pmatrix},$$

wobei wir $\theta' := 1 - \theta$ gesetzt haben, kann das im letzten Abschnitt geschilderte Differenzenverfahren in Matrixschreibweise als

$$(*) \quad Au^{k+1} = Bu^k, \quad k = 0, 1, \dots,$$

geschrieben werden, wobei $u^0 = (u_j^0)$ mit $u_j^0 := \phi(j\Delta x)$, $j = 1, \dots, J-1$. Wegen Aufgabe 2 ist A symmetrisch und positiv definit, insbesondere also nichtsingulär. Daher ist

$$u^{k+1} = A^{-1}Bu^k = \dots = (A^{-1}B)^{k+1}u^0.$$

Wir nennen das Differenzenverfahren $(*)$ *stabil*, wenn alle Eigenwerte von $A^{-1}B$ betragsmäßig kleiner oder gleich Eins sind. Dies ist nach obigem Beispiel plausibel. Unser Ziel ist es zu klären, unter welchen Voraussetzungen das Differenzenverfahren stabil ist. Dies geschieht im folgenden Satz.

Satz 1.1 Seien die Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{(J-1) \times (J-1)}$ wie oben definiert. Dann gilt:

1. Die Matrix $A^{-1}B$ ist ähnlich zu einer symmetrischen Matrix und besitzt daher nur reelle Eigenwerte.
2. Für $\theta \in [0, \frac{1}{2})$ ist das Differenzenverfahren $(*)$ stabil, wenn $\kappa \leq 1/[2(1 - 2\theta)]$, während es für $\theta \in [\frac{1}{2}, 1]$ stets stabil ist.

Beweis: Als symmetrische Matrix lässt sich A durch eine orthogonale Ähnlichkeitstransformation auf Diagonalgestalt transformieren. Es existiert also eine orthogonale Matrix U (orthogonal bedeutet: $U^T U = I$) derart, dass

$$U^T A U = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{J-1}),$$

wobei die Eigenwerte λ_j , $j = 1, \dots, J-1$, von A positiv sind, da A positiv definit ist. Dann ist die *positive Quadratwurzel aus A* definiert durch

$$A^{1/2} := U\Lambda^{1/2}U^T \quad \text{mit} \quad \Lambda^{1/2} := \text{diag}(\lambda^{1/2}, \dots, \lambda_{J-1}^{1/2}).$$

Offenbar ist $A^{1/2}$ ebenfalls symmetrisch und positiv definit, ferner ist $A^{1/2}A^{1/2} = A$. Weiter ist $(A^{-1})^{1/2} = (A^{1/2})^{-1}$, wir schreiben hierfür etwas kürzer auch $A^{-1/2}$. Wegen

$$A^{1/2}(A^{-1}B)A^{-1/2} = A^{-1/2}BA^{-1/2}$$

ähnlich zu $A^{-1}B$ und symmetrisch ist, besitzt $A^{-1}B$ nur reelle Eigenwerte. Sei nun $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von $A^{-1}B$, weiter u ein zugehöriger Eigenvektor. Betrachtet man in $A^{-1}Bu = \lambda u$ die j -te Gleichung, so erhält man nach Einsetzen der Bedeutung von A und B , dass

$$(*) \quad \{\lambda(1 + 2\theta\kappa) - [1 - 2(1 - \theta)\kappa]\}u_j = [(1 - \theta)\kappa + \lambda\theta\kappa](u_{j-1} + u_{j+1})$$

für $j = 1, \dots, J-1$. Mit festem $k \in \{1, \dots, J-1\}$ machen wir für den Eigenvektor u den Ansatz $u = (\sin(kj\Delta x))$. Einsetzen in $(*)$ liefert, dass es sich wirklich um einen Eigenvektor zum Eigenwert λ handelt, falls

$$\lambda(1 + 2\theta\kappa) - [1 - 2(1 - \theta)\kappa] = 2[(1 - \theta)\kappa + \lambda\theta\kappa] \cos(k\Delta x)$$

bzw.

$$\lambda = \frac{1 - 4(1 - \theta)\kappa \sin^2(k\Delta x/2)}{1 + 4\theta\kappa \sin^2(k\Delta x/2)}.$$

Wir wollen uns überlegen, dass wir durch

$$\lambda_k := \frac{1 - 4(1 - \theta)\kappa \sin^2(k\Delta x/2)}{1 + 4\theta\kappa \sin^2(k\Delta x/2)}, \quad k = 1, \dots, J-1,$$

alle⁹ Eigenwerte von $A^{-1}B$ erhalten haben. Das liegt daran, dass die Vektoren $u^{(k)} := (\sin(kj\Delta x))_{j=1, \dots, J-1}$ für $k = 1, \dots, J-1$ einerseits nichttrivial sind (z. B. ist die erste Komponente von Null verschieden) und andererseits paarweise aufeinander senkrecht stehen. Denn für $k, l \in \{1, \dots, J-1\}$ mit $k \neq l$ ist

$$\begin{aligned} (u^{(k)})^T u^{(l)} &= \sum_{j=1}^{J-1} \sin(kj\Delta x) \sin(lj\Delta x) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{J-1} [\cos((k-l)j\Delta x) - \cos((k+l)j\Delta x)] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{J-1} [\Re(e^{i(k-l)j\Delta x}) - \Re(e^{i(k+l)j\Delta x})] \\ &= \frac{1}{2} \Re \left(\sum_{j=0}^{J-1} [(e^{i(k-l)\Delta x})^j - (e^{i(k+l)\Delta x})^j] \right) \end{aligned}$$

⁹Dies wäre klar, wenn die λ_k paarweise voneinander verschieden sind. Ist das der Fall?

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \Re \left(\frac{1 - e^{i(k-l)J\Delta x}}{1 - e^{i(k-l)\Delta x}} - \frac{1 - e^{i(k+l)J\Delta x}}{1 - e^{i(k+l)\Delta x}} \right) \\
&= \frac{1}{2} \Re \left(\frac{1 - e^{i(k-l)\pi}}{1 - e^{i(k-l)\Delta x}} - \frac{1 - e^{i(k+l)\pi}}{1 - e^{i(k+l)\Delta x}} \right).
\end{aligned}$$

Hieran erkennt man, dass $(u^{(k)})^T u^{(l)} = 0$, wenn $k-l$ (und damit auch $k+l$) gerade (und natürlich von Null verschieden) ist, denn dann verschwindet jeder der beiden obigen Summanden. Ist dagegen $k-l$ (und damit auch $k+l$) ungerade, so ist nach obiger Rechnung

$$\begin{aligned}
(u^{(k)})^T u^{(l)} &= \Re \left(\frac{1}{1 - e^{i(k-l)\Delta x}} - \frac{1}{1 - e^{i(k+l)\Delta x}} \right) \\
&= \underbrace{\Re \left(\frac{1}{1 - e^{i(k-l)\Delta x}} \right)}_{=1/2} - \underbrace{\Re \left(\frac{1}{1 - e^{i(k+l)\Delta x}} \right)}_{=1/2} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Damit bilden $\{u^{(1)}, \dots, u^{(J-1)}\}$ ein Orthonormalsystem, die zu $\lambda_1, \dots, \lambda_{J-1}$ gehörenden Eigenvektoren sind also linear unabhängig. Damit sind $\lambda_1, \dots, \lambda_{J-1}$ die Eigenwerte von $A^{-1}B$. Klar ist, dass $\lambda_k \leq 1$, $k = 1, \dots, J-1$. Weiter ist $\lambda_k \geq -1$ genau dann, wenn $1 - 2\kappa(1 - 2\theta) \sin^2(k\Delta x/2) \geq 0$. Dies wiederum ist für $\theta \in [\frac{1}{2}\pi, \pi]$ ohne weitere Bedingung der Fall, während es für $\theta \in [0, \frac{1}{2}]$ der Fall ist, falls $1 - 2\kappa(1 - 2\theta) \geq 0$ bzw. $\kappa \leq 1/[2(1 - 2\theta)]$. Der Satz ist damit bewiesen. \square

Wir können und wollen hier nicht auf die Konvergenztheorie für Differenzenverfahren bei Anfangswertaufgaben partieller Differentialgleichungen eingehen. Für die obige Klasse von Verfahren dürfte klar sein, dass Stabilität eine notwendige Bedingung für die "Konvergenz" des Verfahrens ist, wobei wir uns nicht auf eine genaue Konvergenzdefinition einlassen. Für das explizite Verfahren ($\theta = 0$) lautet die Stabilitätsbedingung $\sigma\Delta t/(\Delta x)^2 \leq \frac{1}{2}$. Es genügt also nicht, sowohl die Orts- als auch die Zeitschrittweite klein werden zu lassen. In Aufgabe 4 kann man selber diese Erfahrung machen.

6.1.4 Aufgaben

1. Sei $\phi: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$\phi(x) := \begin{cases} x, & x \in [0, \frac{1}{2}\pi], \\ \pi - x, & x \in [\frac{1}{2}\pi, \pi]. \end{cases}$$

Man setze ϕ ungerade auf $[-\pi, \pi]$ und anschließend 2π -periodisch auf ganz \mathbb{R} fort. Man zeige, dass

$$a_k := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \phi(x) \cos kx \, dx = 0, \quad k = 0, 1, \dots$$

und

$$b_k := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \phi(x) \sin kx \, dx = \begin{cases} 0, & \text{falls } k \text{ gerade,} \\ \frac{4}{\pi k^2} (-1)^{(k-1)/2}, & \text{falls } k \text{ ungerade,} \end{cases}$$

also

$$\frac{4}{\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)^2} \sin(2j+1)x$$

die Fourierreihe von ϕ ist.

2. Gegeben sei mit einem $\alpha \geq 0$ die Tridiagonalmatrix

$$A := \begin{pmatrix} 1+2\alpha & -\alpha & \cdots & 0 \\ -\alpha & 1+2\alpha & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -\alpha \\ 0 & \cdots & -\alpha & 1+2\alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Man zeige:

- A ist symmetrisch und positiv definit. Genauer sind sogar alle Eigenwerte von A größer oder gleich Eins.
- Alle Einträge der (nichtsingulären) Matrix A^{-1} sind nichtnegativ.

3. Gegeben sei mit einem $\alpha > 0$ die Tridiagonalmatrix

$$A := \begin{pmatrix} 1+2\alpha & -\alpha & \cdots & 0 \\ -\alpha & 1+2\alpha & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -\alpha \\ 0 & \cdots & -\alpha & 1+2\alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Man zeige, dass durch den folgenden Algorithmus die Lösung u des linearen Gleichungssystems $Au = b$ bestimmt wird:

- Berechne $\gamma_1 := 1 + 2\alpha$, setze $c_1 := b_1$.
- Für $i = 2, \dots, n$:
 - Berechne $\beta_i := -\alpha/\gamma_{i-1}$.
 - Berechne $\gamma_i := 1 + 2\alpha + \beta_i\alpha$.
 - Berechne $c_i := b_i - \beta_i c_{i-1}$.
- Berechne $u_n := c_n/\gamma_n$.
- Für $i = n-1, \dots, 1$:
 - Berechne $u_i := (c_i + \alpha u_{i+1})/\gamma_i$.
- Output: Durch $u = (u_i)$ ist die Lösung von $Au = b$ gegeben.

Hinweis: Man zeige, dass $A = LR$ mit

$$L := \begin{pmatrix} 1 & & & \\ \beta_2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \beta_n & 1 \end{pmatrix}, \quad R := \begin{pmatrix} \gamma_1 & -\alpha & & \\ & \gamma_2 & \ddots & \\ & & \ddots & -\alpha \\ & & & \gamma_n \end{pmatrix}.$$

4. Gegeben sei die Anfangsrandwertaufgabe für die Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} u_t &= \sigma u_{xx} && \text{auf } (0, \pi) \times (0, \infty), \\ u(x, 0) &= \phi(x) && \text{auf } (0, \pi) \end{aligned}$$

und $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ auf $(0, \infty)$. Hierbei sei $\phi \in C[0, \pi]$ und $\phi(0) = \phi(\pi) = 0$. Man schreibe ein Programm zur Lösung dieser Aufgabe mit Hilfe des Crank-Nicholson-Verfahrens. Außer σ und ϕ seien *Eingabeparameter*: $J \in \mathbb{N}$ (bestimmt die Schrittweite Δx in Ortsrichtung), Δt (die Schrittweite in Zeitrichtung), $\theta \in [0, 1]$ (Parameter bei Crank-Nicholson), $k_{\max} \in \mathbb{N}$ (Anzahl der Zeitschritte, die durchgeführt werden sollen). *Ausgabeparameter* sei u , ein Vektor bzw. Liste mit den Näherungen zur Zeit $T = k_{\max} \Delta t$. Man teste das Programm für $\sigma := 1$,

$$\phi(x) := \begin{cases} x, & x \in [0, \frac{1}{2}\pi], \\ \pi - x, & x \in [\frac{1}{2}\pi, \pi], \end{cases}$$

für $k_{\max} := 100$ Zeitschritte, $\Delta t = 0.001$ (es wird also eine Näherung zur Zeit $T = 0.1$ ausgegeben) und plote die erhaltenenen Werte für $\theta = 0, 0.5, 1.0$ und $J = 10, 100$.

5. Zur Lösung der Wärmeleitungsgleichung $u_t = \sigma u_{xx}$ in $(0, \pi) \times (0, \infty)$ mit der Anfangsbedingung $u(x, 0) = \phi(x)$ in $[0, \pi]$ und den Randbedingungen $u(0, t) = u_x(\pi, t) = 0$ für $t > 0$ bestimme man mit der Methode der Trennung der Variablen und dem Superpositionsprinzip einen Lösungskandidaten.

6.2 Die Wellengleichung

6.2.1 Wo tritt die Wellengleichung auf?

Diesmal wollen wir die Wellengleichung höchstens ansatzweise herleiten¹⁰ und für Einzelheiten nur auf die Literatur über Physik oder mathematische Physik verweisen. Stattdessen sollen nur einfache Beispiele für das Auftreten der Wellengleichung angegeben werden.

In der (x, u) -Ebene mache eine Saite (kleine) Transversalschwingungen um ihre Gleichgewichtslage, die mit der x -Achse zusammenfällt. Mit $u(x, t)$ bezeichnen wir die vertikale Auslenkung der Saite im Punkt x zur Zeit t und nehmen der Einfachheit halber an, dass die Saite an den Endpunkten $x = 0$ und $x = l$ fest eingespannt ist, also $u(0, t) = u(l, t) = 0$ für alle $t \geq 0$ gilt. In Abbildung 6.5 ist dies veranschaulicht. Die Transversalschwingungen $u = u(x, t)$ einer eingespannten Saite der Dichte ρ und der Spannung σ genügen der Gleichung

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

mit $c^2 = \sigma/\rho$. Hierbei hat die Dichte ρ die Dimension Masse/Länge, die Spannung σ die Dimension einer Kraft, also Masse \times Länge/Zeit², so dass c die Dimension Länge/Zeit, also die einer Geschwindigkeit besitzt. Ist hier c konstant, so nennt man die

¹⁰Recht gut ist z. B. die Darstellung in dem schon öfter erwähnten Buch von R. Haberman (1983, S. 127 ff.), wir benutzen (zum Teil wörtlich) ein Vorlesungsskript von R. Kreß.

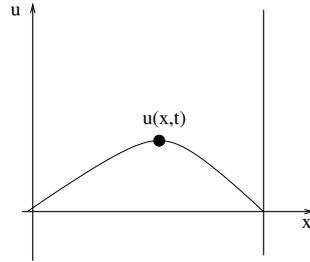


Abbildung 6.5: Transversalschwingungen einer fest eingespannten Saite

partielle Differentialgleichung $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ die (eindimensionale) Wellengleichung. Betrachtet man entsprechend Transversalschwingungen $u = u(x, y, t)$ (mit $(x, y) \in \Omega$) einer am Rand eingespannten Membran der Dichte ρ und der Spannung σ , so erhält man entsprechend $u_{tt} = c^2 \Delta u$ mit $c^2 = \sigma/\rho$ und dem Laplace-Operator $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$.

Jetzt betrachten wir kleine Longitudinalschwingungen eines elastischen Stabes, den wir wieder auf das Intervall $[0, l]$ der x -Achse legen. Dann lassen sich die Longitudinalschwingungen durch eine Funktion $u = u(x, t)$ darstellen, welche zur Zeit t die Längsverschiebung desjenigen Punktes darstellt, der sich im Gleichgewichtszustand an der Stelle x befindet. Diese geometrische Variable wird *Lagrangesche Koordinate* genannt. In Lagrangeschen Koordinaten wird jeder physikalische Punkt des Stabes im Verlaufe der Bewegung durch ein und dieselbe geometrische Koordinate x charakterisiert. Wir betrachten einen Stab konstanten Querschnitts und nehmen an, dass sich die Querschnitte nur längs der Stabachse bewegen. Die Elastizität des Stabes wird durch das *Hookesche Gesetz* der Mechanik beschrieben. Dieses besagt: Die in dem Stab wirkende *Spannung* (Kraft/Querschnitt) ist proportional zur *Dehnung* (Längenänderung/Länge). Der stoffabhängige Proportionalitätsfaktor heißt *Elastizitätsmodul*. Also gilt:

$$\text{Spannung} = \text{Elastizitätsmodul} \times \text{Dehnung}.$$

Dann gilt: Die Longitudinalschwingungen $u = u(x, t)$ eines elastischen Stabes mit Dichte ρ und Elastizitätsmodul E gehorchen der partiellen Differentialgleichung

$$\rho u_{tt} = (E u_x)_x.$$

Dies wollen wir ansatzweise herleiten. Hierzu berechnen wir die relative Verlängerung, d. h. die Dehnung, eines Elements mit den Endpunkten x und $x + \Delta x$ in der Ausgangslage. Die Endpunkte dieses Elements haben zur Zeit t die Koordinaten $x + u(x, t)$ und $x + \Delta x + u(x + \Delta x, t)$. Also ist die Dehnung gleich

$$\frac{u(x + \Delta x, t) - u(x, t)}{\Delta x} = u_x(x + \theta \Delta x, t)$$

mit $\theta \in [0, 1]$. Der Grenzübergang $\Delta x \rightarrow 0$ liefert, dass die Dehnung im Punkt x zur Zeit t durch $u_x(x, t)$ gegeben ist. Nach dem Hookeschen Gesetz ist (jedenfalls für kleine Dehnungen) $\sigma(x, t) = E(x) u_x(x, t)$ die Spannung in x zur Zeit t . Sei F der konstante Stabquerschnitt. Dann liefert das Kräftegleichgewicht an einem Element zu den Lagrangeschen Koordinaten x und $x + \Delta x$, dass

$$\rho(x) F \Delta x u_{tt}(x, t) = [\sigma(x + \Delta x, t) - \sigma(x, t)] F = E(x) F [u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)].$$

Hierbei ist $\rho(x)F\Delta x$ die Masse des herausgegriffenen Elements. Dieses bleibt im Verlaufe der Bewegung konstant. Der Grenzübergang $\Delta x \rightarrow 0$ liefert

$$\rho u_{tt} = (Eu_x)_x.$$

Genau wie bei der im letzten Abschnitt betrachteten Wärmeleitungsgleichung treten auch bei der Wellengleichung neben die Differentialgleichung noch Anfangs- und Randbedingungen, um die *Sachgemäßheit* (insbesondere Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung) der Aufgabenstellung zu sichern. Bei den Transversalschwingungen einer eingespannten Saite hat man z. B. neben der Randbedingung $u(0, t) = u(l, t) = 0$ (hierdurch wird die feste Einspannung wiedergegeben, es sind aber auch inhomogene Randbedingungen, etwa der Form $u(0, t) = f(t)$ und $u(l, t) = g(t)$, denkbar) noch die Anfangsbedingungen $u(x, 0) = \phi(x)$ und $u_t(x, 0) = \psi(x)$ für $x \in [0, l]$ (Auslenkung und Geschwindigkeit zur Zeit $t = 0$). Entsprechendes gilt für die Transversalschwingungen einer Membran $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ mit dem Rand $\partial\Omega$. Neben die Randbedingung $u(x, y, t) = 0$ für $(x, y) \in \Omega$ (auch hier sind natürlich wieder inhomogene Randbedingungen möglich) treten die Anfangsbedingungen $u(x, y, 0) = \phi(x, y)$ und $u_t(x, y, t) = \psi(x, y)$ für $(x, y) \in \Omega$. Es ist klar, dass gewisse *Verträglichkeitsbedingungen* erfüllt sein müssen, um die Existenz einer Lösung zu sichern.

6.2.2 Beispiele

Wir beginnen mit einem sehr einfachen Beispiel, welches sich auf den Fall einer unendlich langen Saite bezieht.

Beispiel: Gesucht sei eine Lösung der Aufgabe, eine Lösung u der Wellengleichung $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ auf $\mathbb{R} \times [0, \infty)$ zu bestimmen, welche den Anfangsbedingungen $u(x, 0) = \sin x$ und $u_t(x, 0) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ genügt. Eine Lösung hierzu kann man sofort hinschreiben, nämlich

$$u(x, t) := \frac{1}{2}[\sin(x - ct) + \sin(x + ct)].$$

Für $c = 1$ haben wir diese Lösung über $[-10, 10] \times [0, 20]$ in Abbildung 6.6 veranschaulicht. Man erkennt, dass die Lösung Summe aus einer nach rechts und einer nach links

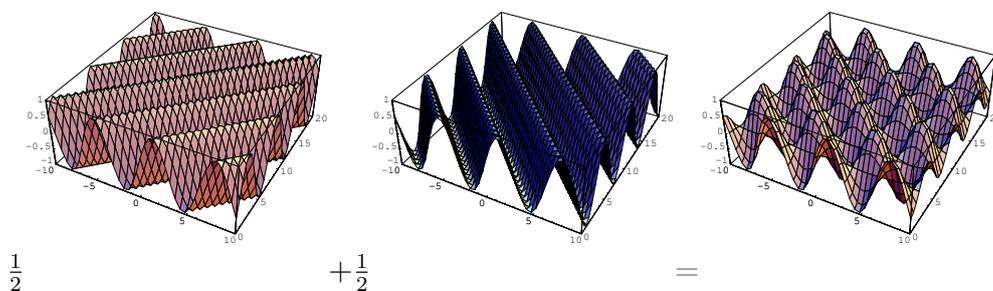


Abbildung 6.6: Lösung der Wellengleichung

fortschreitenden Welle ist. In Aufgabe 1 kann eine allgemeinere Aussage zur Anfangswertaufgabe für die unendlich lange Saite bewiesen werden, nämlich dass durch

$$u(x, t) := \frac{1}{2}[\phi(x - ct) + \phi(x + ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(\xi) d\xi$$

bei hinreichend glatten ϕ und ψ eine Lösung der Wellengleichung mit den Anfangsbedingungen $u(x, 0) = \phi(x)$, $u_t(x, 0) = \psi(x)$ gegeben ist. Bemerkenswert hieran ist, dass die Lösung u in einem Punkt (x_0, t_0) lediglich von den Anfangswerten in dem Intervall $[x_0 - ct_0, x_0 + ct_0]$ abhängt. \square

Nun betrachten wir den Fall einer endlich langen Saite.

Beispiel: Gesucht sei eine Lösung der Wellengleichung $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ auf $(0, \pi) \times (0, \infty)$, welche den Anfangsbedingungen

$$u(x, 0) = \phi(x) := \begin{cases} x, & x \in [0, \frac{1}{2}\pi], \\ \pi - x, & x \in [\frac{1}{2}\pi, \pi], \end{cases} \quad u_t(x, 0) = 0$$

auf $[0, \pi]$ sowie den Randbedingungen $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ für $t > 0$ genügen. Ähnlich wie bei der Wärmeleitungsgleichung wollen wir einen Lösungskandidaten mit Hilfe der Methode der Trennung von Variablen und dem Superpositionsprinzip bestimmen. Daher machen wir wieder den Ansatz $u(x, t) = X(x)T(t)$. Einsetzen in die Wellengleichung liefert

$$\frac{1}{c^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

mit einer Konstanten λ . Wegen der Randbedingungen ist $X(0) = X(\pi) = 0$, wie bei der Wärmeleitungsgleichung erkennen wir, dass nur für $\lambda = k^2$ mit $k \in \mathbb{N}$ eine nichttriviale Lösung existiert, nämlich $X_k(x) = \sin kx$. Der zweite Faktor $T(\cdot)$ ist zu bestimmen als Lösung von $T'' + (ck)^2 T = 0$ mit der allgemeinen Lösung

$$T(t) = a \cos ckt + b \sin ckt.$$

Superposition zeigt, dass

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin kx [a_k \cos ckt + b_k \sin ckt]$$

ein Lösungskandidat für die Wellengleichung ist, welche der Randbedingung genügt. Die Anfangsbedingung $u(x, 0) = \phi(x)$ liefert wie bei der Wärmeleitungsgleichung, dass

$$a_k = \begin{cases} 0, & k \text{ gerade,} \\ \frac{4}{\pi k^2} (-1)^{(k-1)/2}, & k \text{ ungerade} \end{cases}$$

das Erfülltsein der Anfangsbedingung $u(x, 0) = 0$ sichert. Wegen der zweiten Anfangsbedingung $u_t(x, 0) = 0$ sollte $b_k = 0$, $k \in \mathbb{N}$, sein. Daher ist

$$u(x, t) = \frac{4}{\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)^2} \sin(2j+1)x \cos c(2j+1)t$$

ein Lösungskandidat. Diesmal ist aber keineswegs klar, ob Differentiation und Summation vertauscht werden dürfen, um zu sichern, dass es sich hier um eine Lösung der Wellengleichung handelt. In Abbildung 6.7 haben wir den Plot aufgetragen, den wir durch

```
u[x_,t_] := (4/Pi)*Sum[((-1)^j/(2j+1)^2)*Sin[(2j+1)*x]*Cos[(2j+1)*t],
  {j,0,10}]
well=Plot3D[u[x,t],{x,0,Pi},{t,0,20},PlotPoints->30]
```

erhalten haben. Im Gegensatz zur entsprechenden Situation bei der Wärmeleitungs-

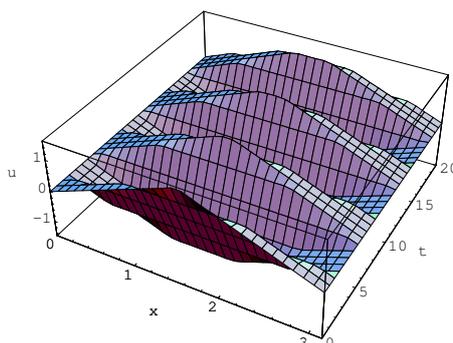


Abbildung 6.7: Transversalschwingungen einer endlichen Saite

gleichung wird hier der Knick in der Anfangsauslenkung offenbar nicht im Laufe der Zeit geglättet. \square

Nun betrachten wir ein bezüglich des Ortes zweidimensionales Problem.

Beispiel: Gegeben sei das Quadrat $\Omega := (0, \pi) \times (0, \pi)$, dessen Rand wir mit $\partial\Omega$ bezeichnen. Man stelle sich Ω als eine am Rand fest eingespannte Membran vor, die zu einer Zeit $t = 0$ ausgelenkt und angeregt ist. Mit einer gewissen Materialkonstanten $c > 0$ ist dann eine Lösung $u(x, y, t)$ der Wellengleichung $u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy})$ in $\Omega \times (0, \infty)$ gesucht, welche der Randbedingung $u(x, y, t) = 0$ für alle $(x, y) \in \partial\Omega$ und alle $t > 0$ sowie den Anfangsbedingungen $u(x, y, 0) = \phi(x, y)$ und $u_t(x, y, 0) = \psi(x, y)$ für $(x, y) \in \Omega$ genügt. Im Prinzip gehen wir ähnlich vor wie im letzten Beispiel, wobei wir allerdings die Methode der Trennung von Veränderlichen gleich zweimal anwenden. Zunächst machen wir den Ansatz $u(x, y, t) = Z(x, y)T(t)$. Einsetzen in die Wellengleichung zeigt, dass dies eine Lösung ist, wenn eine Konstante λ mit

$$Z_{xx} + Z_{yy} + \lambda Z = 0$$

auf Ω und

$$T'' + \lambda c^2 T = 0$$

auf $[0, \infty)$ existiert. Damit u der Randbedingung genügt, sollte Z ferner der Randbedingung $Z(x, y) = 0$, $(x, y) \in \partial\Omega$, genügen. Die Aufgabe, diejenigen λ zu finden, für

welche

$$(*) \quad Z_{xx} + Z_{yy} + \lambda Z = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad Z = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega$$

nichttriviale Lösungen besitzt, lösen wir ebenfalls durch Trennung der Variablen. Der Ansatz $Z(x, y) = X(x)Y(y)$ führt auf

$$\frac{X''}{X} = -\lambda - \frac{Y''}{Y} = -\mu$$

mit einer Konstanten μ . Aus

$$X'' + \mu X = 0, \quad X(0) = X(\pi) = 0$$

erhält man nur für $\mu_k = k^2$ eine nichttriviale Lösung, nämlich (bis auf Vielfache) $X_k(x) = \sin kx$. Die Aufgabe

$$Y'' + (\lambda - \mu_k)Y = 0, \quad Y(0) = Y(\pi) = 0$$

besitzt nur für $\lambda - \mu_k = l^2$ mit $l \in \mathbb{N}$ eine nichttriviale Lösung. Daher besitzt (*) für $\lambda = \lambda_{kl} := k^2 + l^2$ die nichttriviale Lösung $Z_{kl}(x, y) = \sin kx \sin ly$ (und Vielfache davon). Die allgemeine Lösung von $T'' + c^2\lambda_{kl}T = 0$ ist

$$T(t) = a \cos c\sqrt{k^2 + l^2}t + b \sin c\sqrt{k^2 + l^2}t.$$

Daher ist

$$u(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} [a_{kl} \sin kx \sin ly \cos c\sqrt{k^2 + l^2}t + b_{kl} \sin kx \sin ly \sin c\sqrt{k^2 + l^2}t]$$

ein die Randbedingungen erfüllender Lösungskandidat. Die noch unbestimmten Konstanten a_{kl} und b_{kl} sind nun so festzulegen, dass die Anfangsbedingungen $u(x, y, 0) = \phi(x, y)$, $u_t(x, y, 0) = \psi(x, y)$, $(x, y) \in \Omega$, erfüllt sind. Wegen (ohne Skrupel eingesetzt und differenziert)

$$\begin{aligned} u(x, y, 0) &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} a_{kl} \sin kx \sin ly, \\ u_t(x, y, 0) &= c \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \sqrt{k^2 + l^2} b_{kl} \sin kx \sin ly \end{aligned}$$

und

$$\int_0^{\pi} \int_0^{\pi} (\sin kx \sin ly \sin mx \sin ny) dx dy = \begin{cases} 0, & (k, l) \neq (m, n), \\ \frac{\pi^2}{4}, & (k, l) = (m, n) \end{cases}$$

erhält man

$$\begin{aligned} a_{kl} &= \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \phi(x, y) \sin kx \sin ly dx dy, \\ b_{kl} &= \frac{4}{c\sqrt{k^2 + l^2}\pi^2} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \psi(x, y) \sin kx \sin ly dx dy. \end{aligned}$$

Ob der Lösungskandidat dann wirklich eine Lösung ist, ist (und bleibt) nicht geklärt und hängt u. a. von der Glattheit von ϕ, ψ ab. Es wäre nicht schwierig gewesen, statt des Quadrats $(0, \pi) \times (0, \pi)$ ein beliebiges Rechteck zugrunde zu legen. In Abbildung 6.8 geben wir Konturen bzw. Knotenlinien für $Z_{kl}(x, y) = \sin kx \sin ky$ für $(k, l) = (1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 2)$ an. \square

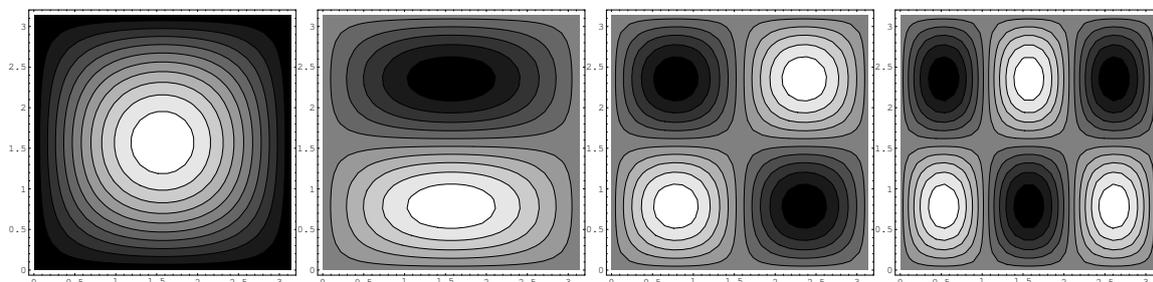


Abbildung 6.8: Knotenlinien von Z_{kl} für $(k, l) = (1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 2)$

Schließlich betrachten wir noch den Fall einer schwingenden kreisförmigen Membran.

Beispiel: Sei $\Omega := \{(x, y) : x^2 + y^2 < a^2\}$ die offene Kreisscheibe um den Nullpunkt mit dem Radius $a > 0$. Gesucht sei eine Lösung u der Wellengleichung $u_{tt} = c^2 \Delta u$ auf $\Omega \times (0, \infty)$, welche der Randbedingung $u(x, y, t) = 0$ für alle $(x, y) \in \partial\Omega$ und alle $t > 0$ genügt, ferner den Anfangsbedingungen $u(x, y, 0) = \phi(x, y)$ und $u_t(x, y, 0) = 0$ für alle $(x, y) \in \Omega$. Durch den Ansatz $u(x, y, t) = Z(x, y)T(t)$ erhalten wir nach bewährtem Muster die beiden Aufgaben

$$\Delta Z + \lambda Z = 0 \quad \text{auf } \Omega, \quad Z = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega$$

und

$$T'' + \lambda c^2 T = 0.$$

Wieder müssen wir uns darüber Gedanken machen, für welche λ die erste Gleichung nichttriviale Lösungen besitzt¹¹. Es ist zweckmäßig, Polarkoordinaten

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

einzuführen. Definiert man $W(r, \theta) := Z(r \cos \theta, r \sin \theta)$, so ist

$$W_r(r, \theta) = Z_x(x, y) \cos \theta + Z_y(x, y) \sin \theta,$$

¹¹Notwendigerweise ist $\lambda > 0$. Dies sieht man ein, indem man annimmt, Z sei für ein $\lambda \leq 0$ eine Lösung von $\Delta Z + \lambda Z = 0$, die auf dem Rand $\partial\Omega$ verschwindet. Eine Multiplikation der Differentialgleichung mit Z , anschließende Integration über Ω , Anwendung der ersten Greenschen Formel (Ersatz für partielle Integration im Eindimensionalen) unter Benutzung der Tatsache, dass Z auf $\partial\Omega$ verschwindet, liefert

$$0 \geq \lambda \int_{\Omega} Z^2 dV = - \int_{\Omega} Z \Delta Z dV = \int_{\Omega} (Z_x^2 + Z_y^2) dV.$$

Hieraus folgt, dass Z konstant und damit schließlich trivial ist.

$$\begin{aligned}
W_{rr}(r, \theta) &= [Z_{xx}(x, y) \cos \theta + Z_{xy}(x, y) \sin \theta] \cos \theta \\
&\quad + [Z_{xy}(x, y) \cos \theta + Z_{yy}(x, y) \sin \theta] \sin \theta \\
&= Z_{xx}(x, y) \cos^2 \theta + Z_{yy}(x, y) \sin^2 \theta + 2Z_{xy}(x, y) \cos \theta \sin \theta, \\
W_\theta(r, \theta) &= -Z_x(x, y)r \sin \theta + Z_y(x, y)r \cos \theta, \\
W_{\theta\theta}(r, \theta) &= [Z_{xx}(x, y)r \sin \theta - Z_{xy}(x, y)r \cos \theta]r \sin \theta - Z_x(x, y)r \cos \theta \\
&\quad + [-Z_{xy}(x, y)r \sin \theta + Z_{yy}(x, y)r \cos \theta]r \cos \theta - Z_y(x, y)r \sin \theta \\
&= r^2[Z_{xx}(x, y) \sin^2 \theta + Z_{yy}(x, y) \cos^2 \theta] - 2r^2Z_{xy}(x, y) \cos \theta \sin \theta \\
&\quad - r[Z_x(x, y) \cos \theta + Z_y(x, y) \sin \theta] \\
&= r^2[Z_{xx}(x, y) + Z_{yy}(x, y)] - r^2W_{rr}(r, \theta) - rW_r(r, \theta).
\end{aligned}$$

Folglich ist die Gleichung $\Delta Z + \lambda Z = 0$ in Polarkoordinaten gleichbedeutend mit

$$W_{rr} + \frac{1}{r}W_r + \frac{1}{r^2}W_{\theta\theta} + \lambda W = 0.$$

Auch hierfür wenden wir die Methode der Trennung von Veränderlichen an, machen also den Ansatz $W(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$. Hierbei sollte $\Theta(\cdot)$ natürlich 2π -periodisch sein. Einsetzen liefert

$$\frac{r^2R''(r) + rR'(r)}{R(r)} + \lambda r^2 = -\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = \mu$$

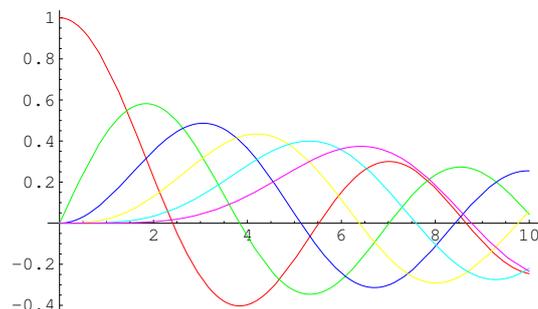
mit einer Konstanten μ . Die Aufgabe $\Theta'' + \mu\Theta = 0$ besitzt für $\mu < 0$ keine nichttriviale 2π -periodische Lösung, wie man durch Multiplikation der Differentialgleichung mit Θ und anschließende Integration über $[0, 2\pi]$ leicht feststellt. Nichttriviale Lösungen gibt es für $\mu = m^2$, $m = 0, 1, \dots$, nämlich von Null verschiedene Konstanten (für $m = 0$) und Linearkombinationen von $\cos m\theta$ und $\sin m\theta$. Bei gegebenem $m = 0, 1, \dots$ geht es jetzt darum, diejenigen $\lambda > 0$ zu bestimmen, für welche

$$r^2R'' + rR' + (\lambda r^2 - m^2)R = 0, \quad R(a) = 0, \quad |R(0)| < \infty$$

eine nichttriviale Lösung besitzt, und natürlich diese Lösungen auch zu berechnen bzw. anzugeben. Die Bedingung $R(a) = 0$ ergibt sich durch die Forderung, dass die gesuchte Lösung u und damit auch Z auf $\partial\Omega$ verschwindet. Durch die Variablentransformation $z = \sqrt{\lambda}r$ reduziert man die Aufgabe darauf, eine nichttriviale Lösung von

$$(*) \quad z^2Q'' + zQ' + (z^2 - m^2)Q = 0, \quad Q(\sqrt{\lambda}a) = 0, \quad |Q(0)| < \infty$$

zu finden. Dies bedeutet: Ist Q Lösung von $(*)$, so ist $R(r) := Q(\sqrt{\lambda}r)$ Lösung der ursprünglichen Aufgabe. Die Differentialgleichung $z^2Q'' + zQ' + (z^2 - m^2)Q = 0$ ist nun eine der berühmtesten Differentialgleichungen, die sogenannte *Besselsche Differentialgleichung*. Bei gegebenem m besitzt die Besselsche Differentialgleichung bis auf Vielfache genau eine Lösung, die für $z = 0$ endlich ist, die sogenannte Bessel Funktion erster Art $J_m(z)$. In *Mathematica* bekommt man durch `BesselJ[m, z]` gerade die m -te Besselfunktion erster Art $J_m(z)$. In Abbildung 6.9 plotten wir J_0, \dots, J_5 auf dem Intervall $[0, 10]$. Diesen Plot (rot= J_0 , grün= J_1 , blau= J_2 , gelb= J_3 , hellblau= J_4 , hellrot= J_5) haben wir durch

Abbildung 6.9: Die Bessel Funktionen erster Art J_0, \dots, J_5

```
bessel=Plot[{BesselJ[0,x],BesselJ[1,x],BesselJ[2,x],BesselJ[3,x],
  BesselJ[4,x],BesselJ[5,x]},{x,0,10},
  PlotStyle->{RGBColor[1,0,0],RGBColor[0,1,0],RGBColor[0,0,1],
  RGBColor[1,1,0],RGBColor[0,1,1],RGBColor[1,0,1]}]
```

erhalten. Damit auch noch die Bedingung $Q(\sqrt{\lambda}a) = 0$ erfüllt ist, muss $\sqrt{\lambda}a$ Nullstelle von J_m sein. Von diesen gibt es abzählbar viele, die etwa mit z_{m1}, z_{m2}, \dots bezeichnet werden. In *Mathematica* hat man nach

```
Needs["NumericalMath`BesselZeros`"]
```

Zugriff auf die Nullstellen der Besselfunktionen (und ihrer Ableitungen). Z. B. liefert `BesselJZeros[0,10]` eine Liste bzw. einen Vektor mit den ersten 10 Nullstellen der Bessel Funktion J_0 . In der folgenden Tabelle stellen wir die ersten 10 Nullstellen der Bessel Funktionen J_0, \dots, J_5 zusammen.

| n | z_{0n} | z_{1n} | z_{2n} | z_{3n} | z_{4n} | z_{5n} |
|-----|-----------|-----------|-----------|-----------|------------|-----------|
| 1 | 2.404826 | 3.831706 | 5.135622 | 6.380162 | 7.588342 | 8.771484 |
| 2 | 5.520078 | 7.015587 | 8.417244 | 9.761023 | 11.0647095 | 12.338604 |
| 3 | 8.653728 | 10.173468 | 11.619841 | 13.015201 | 14.372537 | 15.700174 |
| 4 | 11.791534 | 13.323692 | 14.795952 | 16.223466 | 17.615966 | 18.980134 |
| 5 | 14.930918 | 16.470630 | 17.959819 | 19.409415 | 20.826933 | 22.217800 |
| 6 | 18.071064 | 19.615859 | 21.116997 | 22.582730 | 24.019020 | 25.430341 |
| 7 | 21.211637 | 22.760084 | 24.270112 | 25.748167 | 27.199088 | 28.626618 |
| 8 | 24.352472 | 25.903672 | 27.420574 | 28.908351 | 30.371008 | 31.811717 |
| 9 | 27.493479 | 29.046829 | 30.569204 | 32.064852 | 33.537138 | 34.988781 |
| 10 | 30.634606 | 32.189680 | 33.716520 | 35.218671 | 36.699001 | 38.159869 |

Aus $\sqrt{\lambda}a = z_{mn}$ erhalten wir $\lambda = \lambda_{mn} := z_{mn}^2/a^2$ als diejenigen Parameter, zu denen eine nichttriviale Lösung von $\Delta Z + \lambda Z = 0$ in der offenen Kreisscheibe Ω existiert,

welche auf $\partial\Omega$ verschwindet. Durch

$$U_{mn}^{(1)}(r, \theta, t) := J_m(\sqrt{\lambda_{mn}}r) \cos m\theta \cos c\sqrt{\lambda_{mn}}t, \quad (m, n) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N},$$

und

$$U_{mn}^{(2)}(r, \theta, t) := J_m(\sqrt{\lambda_{mn}}r) \sin m\theta \cos c\sqrt{\lambda_{mn}}t, \quad (m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N},$$

hat man damit nichttriviale Funktionen gefunden, die auf der offenen Kreisscheibe der Wellengleichung genügen, die auf dem Rand des Kreises verschwinden und der Anfangsbedingung genügen, dass die Membran zur Zeit $t = 0$ im Ruhezustand ist. Durch Bildung von Linearkombinationen versucht man eine Funktion zu konstruieren, die zur Zeit $t = 0$ die vorgegebene Auslenkung besitzt. Man macht also den Ansatz

$$\begin{aligned} U(r, \theta, t) = & \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} J_m(\sqrt{\lambda_{mn}}r) \cos m\theta \cos c\sqrt{\lambda_{mn}}t \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} J_m(\sqrt{\lambda_{mn}}r) \sin m\theta \cos c\sqrt{\lambda_{mn}}t, \end{aligned}$$

wobei die Koeffizienten A_{mn}, B_{mn} so zu bestimmen sind, dass

$$\phi(r \cos \theta, r \sin \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} J_m(\sqrt{\lambda_{mn}}r) \cos m\theta + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} J_m(\sqrt{\lambda_{mn}}r) \sin m\theta.$$

Zur Berechnung der gesuchten Gewichte sind wieder Orthogonalitätsrelationen nützlich. Wir wollen uns überlegen, dass

$$\int_0^a J_m(\sqrt{\lambda_{mp}}r) J_m(\sqrt{\lambda_{mq}}r) r dr = 0, \quad p \neq q.$$

Denn: Wir wissen, dass $R_{mp}(r) := J_m(\sqrt{\lambda_{mp}}r)$ eine Lösung von

$$r^2 R'' + rR' + (\lambda_{mp}r^2 - m^2)R = 0, \quad R(a) = 0$$

ist, welche auf $[0, a]$ glatt ist. Dividiert man die Differentialgleichung durch r , so erkennt man, dass

$$(rR'_{mp}(r))' + \left(\lambda_{mp}r - \frac{m^2}{r^2}\right)R_{mp}(r) = 0, \quad (rR'_{mq}(r))' + \left(\lambda_{mq}r - \frac{m^2}{r^2}\right)R_{mq}(r) = 0$$

auf $(0, a]$. Multipliziert man die erste Gleichung mit R_{mq} , die zweite mit R_{mp} und subtrahiert man die Gleichungen anschließend voneinander, so erhält man

$$(rR'_{mp}(r))'R_{mq}(r) - (rR'_{mq}(r))'R_{mp}(r) + (\lambda_{mp} - \lambda_{mq})rR_{mp}(r)R_{mq}(r).$$

Eine Integration über $[0, a]$ liefert (es sei $p \neq q$ und daher $\lambda_{mp} \neq \lambda_{mq}$)

$$\underbrace{(\lambda_{mp} - \lambda_{mq})}_{\neq 0} \int_0^a rR_{mp}(r)R_{mq}(r) dr = \int_0^a [(rR'_{mq}(r))'R_{mp}(r) - (rR'_{mp}(r))'R_{mq}(r)] dr$$

$$\begin{aligned}
&= \underbrace{rR_{mq}(r)R_{mp}(r)}_{=0} \Big|_0^a - \int_0^a rR'_{mq}(r)R'_{mp}(r) dr \\
&\quad - \underbrace{rR_{mp}(r)R_{mq}(r)}_{=0} \Big|_0^a \\
&\quad + \int_0^a rR'_{mp}(r)R'_{mq}(r) dr \\
&= 0,
\end{aligned}$$

womit die behauptete Orthogonalitätsbeziehung bewiesen ist. Weiter ist

$$\int_0^a rJ_m^2(\sqrt{\lambda_{mn}}r) dr = \int_0^a rJ_m^2((z_{mn}/a)r) dr = a^2 \int_0^1 rJ_m^2(z_{mn}r) dr = a^2 c_{mn},$$

wobei wir zur Abkürzung

$$c_{mn} := \int_0^1 rJ_m^2(z_{mn}r) dr, \quad (m, n) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N},$$

gesetzt haben. Man kann nachweisen (siehe Aufgabe 7), dass

$$c_{0n} = \frac{J_1^2(z_{0n})}{2}, \quad c_{mn} = -\frac{J_{m-1}(z_{mn})J_{m+1}(z_{mn})}{2}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Da auch die trigonometrischen Funktionen über ihr Periodenintervall orthogonal sind, ist

$$\left\{ \int_0^a \int_0^{2\pi} rJ_m(\sqrt{\lambda_{mn}}r) \begin{Bmatrix} \cos m\theta \\ \sin m\theta \end{Bmatrix} J_k(\sqrt{\lambda_{kl}}r) \begin{Bmatrix} \cos k\theta \\ \sin k\theta \end{Bmatrix} d\theta dr = 0, \right. \\ \left. (m, n) \neq (k, l). \right.$$

Für $(m, n) = (k, l)$ erhält man

$$\int_0^a \int_0^{2\pi} rJ_m^2(\sqrt{\lambda_{mn}}r) \cos^2 m\theta d\theta dr = a^2\pi \begin{cases} 2c_{0n}, & m = 0, \\ c_{mn}, & m \neq 0 \end{cases}$$

bzw.

$$\int_0^a \int_0^{2\pi} rJ_m^2(\sqrt{\lambda_{mn}}r) \sin^2 m\theta d\theta dr = a^2\pi c_{mn}, \quad m \neq 0.$$

Für die Koeffizienten A_{mn}, B_{mn} in

$$\phi(r \cos \theta, r \sin \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} J_m(\sqrt{\lambda_{mn}}r) \cos m\theta + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} J_m(\sqrt{\lambda_{mn}}r) \sin m\theta$$

erhalten wir damit

$$A_{0n} = \frac{1}{2a^2\pi c_{0n}} \int_0^a \int_0^{2\pi} \phi(r \cos \theta, r \sin \theta) r J_0(\sqrt{\lambda_{0n}}r) d\theta dr$$

und

$$A_{mn} = \frac{1}{a^2 \pi c_{mn}} \int_0^a \int_0^{2\pi} \phi(r \cos \theta, r \sin \theta) r J_m(\sqrt{\lambda_{mn} r}) \cos m\theta \, d\theta \, dr, \quad m \neq 0,$$

sowie

$$B_{mn} = \frac{1}{a^2 \pi c_{mn}} \int_0^a \int_0^{2\pi} \phi(r \cos \theta, r \sin \theta) r J_m(\sqrt{\lambda_{mn} r}) \sin m\theta \, d\theta \, dr, \quad m \neq 0.$$

Natürlich bleibt immer noch einiges an Arbeit übrig, um im konkreten Fall die Koeffizienten zu berechnen. Ein Fall ist allerdings verhältnismäßig einfach, auf ihn sollten wir noch eingehen. Angenommen, es ist $\phi(r \cos \theta, r \sin \theta) = \psi(r)$, die Anfangsauslenkung also rotationssymmetrisch. Dann ist

$$A_{0n} = \frac{1}{a^2 c_{0n}} \int_0^a \psi(r) r J_0(\sqrt{\lambda_{0n} r}) \, dr$$

und $A_{mn} = B_{mn} = 0$, $m \neq 0$. Also ist in diesem Fall auch die Lösung rotationssymmetrisch und gegeben durch

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{0n} J_0(\sqrt{\lambda_{0n} r}) \cos c\sqrt{\lambda_{0n} t}.$$

□

6.2.3 Aufgaben

1. Seien $\phi \in C^2(\mathbb{R})$, $\psi \in C^1(\mathbb{R})$ und $c > 0$ gegeben. Man zeige, dass durch

$$u(x, t) := \frac{1}{2} [\phi(x - ct) + \phi(x + ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(\xi) \, d\xi$$

eine Lösung der Wellengleichung $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ auf $\mathbb{R} \times [0, \infty)$ gegeben ist, welche den Anfangsbedingungen

$$u(x, 0) = \phi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x)$$

auf \mathbb{R} genügt.

2. Seien $\phi \in C^2[0, \pi]$, $\psi \in C^1[0, \pi]$ vorgegebene Funktionen mit

$$\phi(0) = \phi(\pi) = \psi(0) = \psi(\pi) = \phi''(0) = \phi''(\pi) = 0,$$

ferner sei $c > 0$ gegeben. Man gewinne $\Phi, \Psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dadurch, dass man ϕ bzw. ψ ungerade auf $[-\pi, \pi]$ und anschließend 2π -periodisch auf ganz \mathbb{R} fortsetzt. Man zeige, dass durch

$$u(x, t) := \frac{1}{2} [\Phi(x - ct) + \Phi(x + ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \Psi(\xi) \, d\xi$$

eine Lösung der Wellengleichung $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ auf $(0, \pi) \times (0, \infty)$ gegeben ist, die den homogenen Randbedingungen $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ auf $(0, \infty)$ und auf $(0, \pi)$ den Anfangsbedingungen $u(x, 0) = \phi(x)$ und $u_t(x, 0) = \psi(x)$ genügt.

3. Mit Hilfe der Methode der Fourierreihen bestimme man einen Lösungskandidaten für das Anfangsrandwertproblem

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} & \text{auf } (0, \pi) \times (0, \infty), & u(0, t) = u(\pi, t) = 0 & \text{auf } (0, \infty), \\ u(x, 0) = 1, & u_t(x, 0) = 0 & \text{auf } (0, \pi). \end{cases}$$

4. Man bestimme eine Lösung der Wellengleichung $u_{tt} = u_{xx}$ in $(0, \pi) \times (0, \infty)$, welche den homogenen Anfangsbedingungen $u(x, 0) = u_t(x, 0)$ in $[0, \pi]$ und den Randbedingungen $u(0, t) = 0$ und $u_x(\pi, t) = 1$ auf $(0, \infty)$ genügt.

Hinweis: Man bestimme $v(x, t) := u(x, t) - x$ durch die Methode der Trennung von Variablen und das Superpositionsprinzip.

5. Sei m eine nichtnegative ganze Zahl. Für eine Lösung der Besselschen Differentialgleichung

$$z^2 Q'' + zQ' + (z^2 - m^2)Q = 0,$$

welche für $z = 0$ endlich ist, mache man einen Potenzreihenansatz

$$Q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{k+n}$$

mit einer noch unbekanntem nichtnegativen ganzen Zahl k und unbekanntem Koeffizienten $a_0 \neq 0, a_1, \dots$. Man bestimme k und a_0, a_1, \dots , letztere bis auf ein gemeinsames Vielfaches.

6. Für $m \in \mathbb{N}_0$ kann die Besselfunktion J_m durch

$$J_m(z) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{2^{m+2l} l! (m+l)!} z^{m+2l}$$

definiert werden. Man zeige, dass

$$\frac{d}{dz} [z^m J_m(z)] = z^m J_{m-1}(z), \quad m \in \mathbb{N}$$

und

$$J'_0(z) = -J_1(z).$$

7. Für $m \in \mathbb{N}$ kann die Ableitung J'_m der m -ten Besselfunktion J_m erster Art nach einer der folgenden Formeln berechnet werden:

$$J'_m(z) = \begin{cases} -J_{m+1}(z) + \frac{m}{z} J_m(z), \\ J_{m-1}(z) - \frac{m}{z} J_m(z), \\ \frac{1}{2} [J_{m-1}(z) - J_{m+1}(z)]. \end{cases}$$

8. Man zeige, dass

$$\frac{d}{dz} \left[\frac{1}{2} z^2 (J_0^2(z) + J_1^2(z)) \right] = z J_0^2(z)$$

und

$$\frac{d}{dz} \left[\frac{1}{2} z^2 (J_m^2(z) - J_{m-1}(z) J_{m+1}(z)) \right] = z J_m^2(z), \quad m \in \mathbb{N}.$$

Mit Hilfe dieser Beziehungen berechne man

$$c_{mn} := \int_0^1 z J_m^2(z_{mn} z) dz,$$

wobei z_{mn} die n -te positive Nullstelle von J_m ist.

9. Die folgende Aufgabe beschäftigt sich zwar nicht mit der Wellengleichung, sondern mit der Wärmeleitungsgleichung, zu ihrer Bearbeitung werden aber Besselfunktionen benötigt, so dass die Aufgabe erst jetzt gestellt wird.

Sei $\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ die Einheitskreisscheibe mit dem Rand $\partial\Omega$. Gesucht sei eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung $u_t = u_{xx} + u_{yy}$ auf $\Omega \times (0, \infty)$, welche der Randbedingung $u(x, y, t) = 1$ für $(x, y) \in \partial\Omega$ und $t > 0$ und der Anfangsbedingung $u(x, y, 0) = 0$ für $(x, y) \in \Omega$ genügt. Man transformiere das Problem durch $v := 1 - u$ zunächst auf homogene Randdaten, führe eine Trennung der Veränderlichen durch, führe Polarkoordinaten ein und benutze das Superpositionsprinzip.

10. Gegeben sei die Anfangswertaufgabe für die Wellengleichung. Bei gegebenen $c > 0$, $\phi \in C^2(\mathbb{R})$ und $\psi \in C^1(\mathbb{R})$ sei also eine Lösung von $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ in $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ gesucht, welche den Anfangsbedingungen $u(x, 0) = \phi(x)$, $u_t(x, 0) = \psi(x)$ genügt. Man überziehe die obere (x, t) -Halbebene mit einem Gitter mit der Maschenweite $\Delta x > 0$ in x -Richtung und $\Delta t > 0$ in t -Richtung. Als Gitterpunkte hat man dann $(x_j, t_k) := (j\Delta x, k\Delta t)$, $(j, k) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_0$. Mit u_j^k bezeichne man wieder eine Näherung für die Lösung in (x_j, t_k) . Zur Abkürzung setze man ferner

$$\phi_j := \phi(x_j), \quad \psi_j := \psi(x_j), \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Man setze $r := c\Delta t/\Delta x$.

- (a) Man begründe, wie man darauf kommt, die ersten beiden Zeit-Level u_j^0, u_j^1 , $j \in \mathbb{Z}$, aus

$$u_j^0 := \phi_j, \quad u_j^1 := \phi_j + \Delta t \psi_j + \frac{r^2}{2} (\phi_{j+1} - 2\phi_j + \phi_{j-1}), \quad j \in \mathbb{Z},$$

zu berechnen. Insbesondere erläutere man, weshalb es besser ist, den Zeit-Level u_j^1 in der angegebenen Weise zu berechnen als durch

$$u_j^1 := \phi_j + \Delta t \psi_j, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

- (b) Man erläutere, wodurch die Vorschrift, den $(k+1)$ -ten Zeit-Level aus dem k -ten und $(k-1)$ -ten Zeit-Level durch

$$u_j^{k+1} := 2(1-r^2)u_j^k + r^2(u_{j+1}^k + u_{j-1}^k) - u_j^{k-1}, \quad j \in \mathbb{Z},$$

zu berechnen, motiviert werden kann.

- (c) Die exakte Lösung in (x_j, t_k) hängt von den Anfangswerten in $[x_j - ct_k, x_j + ct_k]$ (analytischer Abhängigkeitsbereich) ab. Man stelle fest, von welchen Anfangswerten die berechnete Lösung u_j^k abhängt, bestimme also den sogenannten numerischen Abhängigkeitsbereich. Weshalb sollte der analytische im numerischen Abhängigkeitsbereich enthalten sein? Auf welche Forderung an die Schrittweiten führt dies? Wenn Sie diese Fragen beantwortet haben, haben Sie im wesentlichen die Courant-Friedrichs-Lewy Bedingung hergeleitet.

6.3 Die Laplace-Gleichung

Die Gleichung $\Delta u = 0$, wobei

$$\Delta := \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

der sogenannte *Laplace-Operator* ist, nennt man die *Laplace-Gleichung*. Wir betrachten nur den Fall $d = 2$ (ebener Fall) und nennen die beiden unabhängigen Variablen nicht x_1, x_2 , sondern x, y . Die Laplace-Gleichung kommt in vielen Bereichen der Physik vor. Wir nennen nur Stichworte, über die man sich in der entsprechenden Literatur näher informieren kann.

- Das Geschwindigkeitspotential u einer stationären, reibungs- und wirbelfreien inkompressiblen Strömung genügt der Laplace-Gleichung.
- Das Potential u eines elektrostatischen Feldes genügt der Laplace-Gleichung.

Wir werden uns kurz halten und lediglich die Idee der Differenzenverfahren zur Lösung des einfachst möglichen Problems in diesem Zusammenhang, nämlich der Laplace-Gleichung auf dem Einheitsquadrat mit *Dirichlet¹²-schen Randbedingungen*, schildern. Sei also

$$\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x, y < 1\}$$

das Einheitsquadrat, $\partial\Omega$ bezeichne den Rand von Ω . Gegeben seien Randdaten $f \in C(\partial\Omega)$. Beim Dirichlet-Problem für die Laplace-Gleichung ist eine Funktion

$$u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$$

gesucht mit

$$\Delta u(x, y) = u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Omega,$$

und

$$u(x, y) = f(x, y), \quad (x, y) \in \partial\Omega.$$

Man beachte: Das eindimensionale Analogon ist ganz einfach. Hier ist $\Omega = (0, 1)$, gegeben sind Randdaten f_0, f_1 . Gesucht ist eine Lösung der Differentialgleichung $u'' = 0$ in $(0, 1)$, welche den Randbedingungen $u(0) = f_0, u(1) = f_1$ genügt. Die eindeutige Lösung ist offenbar $u(x) = (1-x)f_0 + xf_1$. Man sieht einmal mehr, wie viel schwieriger partielle als gewöhnliche Differentialgleichungen sind.

¹²Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (Born: 13 Feb 1805 in Düren, French Empire (now Germany) Died: 5 May 1859 in Göttingen, Hanover (now Germany)): Lejeune Dirichlet taught at the University of Breslau in 1827 and the University of Berlin from 1828 to 1855. He then succeeded to Gauss's chair at Göttingen. ... In mechanics he investigated the equilibrium of systems and potential theory. This led him to the Dirichlet problem concerning harmonic functions with given boundary conditions.

6.3.1 Differenzenverfahren beim Dirichlet-Problem

Wir betrachten das oben formulierte Dirichlet-Problem für die Laplace-Gleichung auf dem Einheitsquadrat. Über das Einheitsquadrat lege man ein Gitter, wobei wir der Einfachheit halber davon ausgehen, dass die Schrittweite in x - und in y -Richtung dieselbe ist. Mit $h := 1/(n + 1)$ definieren wir also die Gitterpunkte $(x_i, y_j) := (ih, jh)$, $0 \leq i, j \leq n + 1$. Differenzenverfahren basieren darauf, dass Differentialquotienten in der Differentialgleichung durch Differenzenquotienten ersetzt werden. Für $1 \leq i, j \leq n$ und "hinreichend glattes" u ist

$$\begin{aligned} \Delta u(x_i, y_j) &= u_{xx}(x_i, y_j) + u_{yy}(x_i, y_j) \\ &= \frac{u(x_i - h, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i + h, y_j)}{h^2} \\ &\quad + \frac{u(x_i, y_j - h) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_j + h)}{h^2} + O(h^2) \\ &= \frac{u(x_{i-1}, y_j) + f(x_i, y_{j+1}) + f(x_{i+1}, y_j) + f(x_i, y_{j-1}) - 4u(x_i, y_j)}{h^2} \\ &\quad + O(h^2). \end{aligned}$$

Nach

Series [(u[x-h,y]+u[x+h,y]+u[x,y+h]+u[x,y-h]-4*u[x,y])/h^2,{h,0,3}]

erhält man als Output

$$(u^{(0,2)}(x, y) + u^{(2,0)}(x, y)) + \frac{1}{12} \left(u^{(0,4)}(x, y) + u^{(4,0)}(x, y) \right) h^2 + O[h]^4.$$

Ist also $P = (x, y)$, und sind $O = (x + h, y)$, $N = (x, y + h)$, $W = (x - h, y)$ und $S = (x, y - h)$ die Nachbarn im Osten, Norden, Westen und Süden, so ist

$$\Delta u(P) \approx \frac{u(O) + u(N) + u(W) + u(S) - 4u(P)}{h^2}.$$

Dies wird durch den sogenannten *Differenzenstern* in Abbildung 6.10 verdeutlicht.

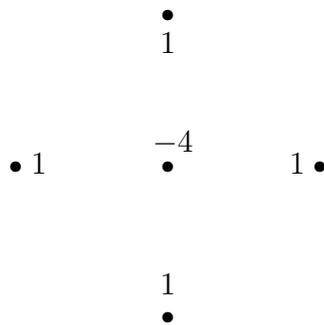


Abbildung 6.10: Der 5-Punkt Differenzenstern für den Laplace-Operator

Diskretisiert man $\Delta u(x_i, y_j)$ für $1 \leq i, j \leq n$ durch den angegebenen 5-Punkt Differenzenstern, bezeichnet man mit $u_{i,j}$ eine Näherung für die Lösung u an der Stelle (x_i, y_j) ,

ordnet man ferner die Unbekannten $u_{i,j}$, $1 \leq i, j \leq n$, zeilenweise an und fasst diese zu einem Vektor u zusammen, wobei eine Verwechslung dieses Vektors mit einer Lösung u der gegebenen kontinuierlichen Aufgabe vermieden werden sollte:

$$u = (u_{1,1}, \dots, u_{n,1}, u_{1,2}, \dots, u_{n,2}, \dots, u_{1,n}, \dots, u_{n,n})^T \in \mathbb{R}^{n^2},$$

so erhält man nach Einarbeiten der Randbedingungen das lineare Gleichungssystem $Au = b$ mit der Blocktridiagonalmatrix

$$A := \begin{pmatrix} A_n & -I_n & \cdots & 0 \\ -I_n & A_n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -I_n \\ 0 & \cdots & -I_n & A_n \end{pmatrix},$$

der Tridiagonalmatrix

$$A_n := \begin{pmatrix} 4 & -1 & \cdots & 0 \\ -1 & 4 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

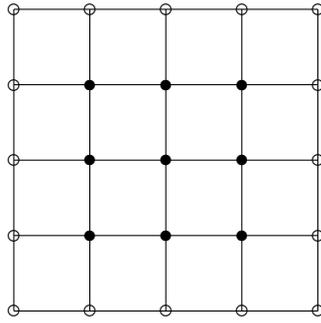
und der $n \times n$ -Einheitsmatrix I_n . Die rechte Seite b ist gegeben durch

$$b^T := \begin{pmatrix} f_{0,1} + f_{1,0} & , & f_{2,0} & , & \cdots & , & f_{n-1,0} & , & f_{n,0} + f_{n+1,1} & , \\ f_{0,2} & , & 0 & , & \cdots & , & 0 & , & f_{n+1,2} & , \\ \vdots & , & \vdots & , & \cdots & , & \vdots & , & \vdots & , \\ f_{0,n-1} & , & 0 & , & \cdots & , & 0 & , & f_{n+1,n-1} & , \\ f_{0,n} + f_{1,n+1} & , & f_{2,n+1} & , & \cdots & , & f_{n-1,n+1} & , & f_{n,n+1} + f_{n+1,n} & , \end{pmatrix}$$

wobei wir $f_{i,j} := f(x_i, y_j)$ gesetzt haben, wenn $(x_i, y_j) \in \partial\Omega$, also $i \in \{0, n+1\}$ oder $j \in \{0, n+1\}$. Insgesamt erhält man also ein lineares Gleichungssystem von $m := n^2$ Gleichungen mit ebenso vielen Unbekannten.

Beispiel: Wir wollen den Fall $n = 3$ verdeutlichen. Hier hat man das in Abbildung 6.11 abgebildete Gitter über dem Einheitsquadrat. Innere Gitterpunkte werden mit \bullet , Randgitterpunkte mit \circ gekennzeichnet. Die Gitterpunkte werden zeilenweise, von links nach rechts, numeriert. Natürlich sind auch andere Numerierungen möglich. Es resultiert das lineare Gleichungssystem

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{array} \right) \begin{pmatrix} u_{1,1} \\ u_{1,2} \\ u_{1,3} \\ \hline u_{2,1} \\ u_{2,2} \\ u_{2,3} \\ \hline u_{3,1} \\ u_{3,2} \\ u_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{1,0} + f_{0,1} \\ f_{2,0} \\ \hline f_{3,0} + f_{4,1} \\ f_{0,2} \\ 0 \\ \hline f_{4,2} \\ \hline f_{0,3} + f_{1,4} \\ f_{2,4} \\ f_{3,4} + f_{4,3} \end{pmatrix}.$$

Abbildung 6.11: Der Fall $n = 3$

□

Wir wollen Eigenschaften der Koeffizientenmatrix A nachweisen. Zunächst aber eine Definition.

Definition 3.1 Eine Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ heißt *zerlegbar* (oder auch *zerfallend*, *reduzibel*), wenn es nichtleere Teilmengen M_1, M_2 von $M := \{1, \dots, m\}$ mit $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, $M_1 \cup M_2 = M$ sowie $a_{ij} = 0$ für alle $(i, j) \in M_1 \times M_2$ gibt. Weiter genügt die Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ dem *schwachen Zeilensummenkriterium*, wenn

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m |a_{ij}| \begin{cases} \leq |a_{ii}| & \text{für } i = 1, \dots, m, \\ < |a_{ii}| & \text{für mindestens ein } i = i_0. \end{cases}$$

Beispiel: Ganz offensichtlich genügt obige Blocktridiagonalmatrix A dem schwachen Zeilensummenkriterium. Ferner ist A nicht zerlegbar. Denn angenommen, es gibt nichtleere Teilmengen M_1, M_2 von $M := \{1, \dots, n^2\}$ mit den angegebenen Eigenschaften. O. B. d. A. können wir $1 \in M_1$ annehmen. Wir zeigen $M_1 = \{1, \dots, n^2\}$, indem wir aus $\{1, \dots, i\} \subset M_1$ mit $1 \leq i < n^2$ auf $i+1 \in M_1$ bzw. $\{1, \dots, i+1\} \subset M_1$ schließen. Wir unterscheiden zwei Fälle. Im ersten Fall ist i kein Vielfaches von n , lässt sich also als $i = (\nu - 1)n + \mu$ mit $\nu \in \{1, \dots, n\}$ und $\mu \in \{1, \dots, n-1\}$ darstellen. Wegen $a_{i, i+1} = -1 \neq 0$ ist $i+1 \in M_1$. Ist dagegen i ein Vielfaches von n , also $i = \nu n$ mit $\nu \in \{1, \dots, n-1\}$, so ist $a_{i+1-n, i+1} = -1 \neq 0$. Wegen $i+1-n \in M_1$ ist auch $i+1 \in M_1$. Insgesamt ist daher $M_1 = \{1, \dots, n^2\}$, was ein Widerspruch ist. □

Aus dem folgenden Satz wird folgen, dass die obige Blocktridiagonalmatrix einige schöne Eigenschaften besitzt.

Satz 3.2 Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ nicht zerlegbar, ferner genüge A dem schwachen Zeilensummenkriterium. Dann gilt:

1. A besitzt von Null verschiedene Diagonalelemente und ist nichtsingulär.
2. Sind die Diagonalelemente von A positiv und die Außerdiagonalelemente von A nichtpositiv, so ist $A^{-1} \geq 0$ bzw. sind alle Einträge von A^{-1} nichtnegativ.

3. Ist A symmetrisch und sind die Diagonalelemente von A sämtlich positiv, so ist A positiv definit.

Beweis: Zunächst zeigen wir:

- Ist $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ nicht zerlegbar und genügt A dem schwachen Zeilensummenkriterium, so sind die Diagonalelemente von A von Null verschieden.

Denn: Andernfalls wäre durch

$$M_1 := \{i \in M : a_{ii} = 0\}, \quad M_2 := \{j \in M : a_{jj} \neq 0\}$$

eine nichttriviale Zerlegung von $M := \{1, \dots, m\}$ gegeben. Ist $i \in M_1$, so ist $a_{ij} = 0$, $j = 1, \dots, m$, da A dem schwachen Zeilensummenkriterium genügt. Insbesondere ist $a_{ij} = 0$ für $(i, j) \in M_1 \times M_2$, ein Widerspruch dazu, dass A nicht zerlegbar ist.

Als nächstes folgt:

- Ist $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ nicht zerlegbar und genügt A dem schwachen Zeilensummenkriterium, so ist A nichtsingulär.

Denn: Wir nehmen an, es gäbe einen vom Nullvektor verschiedenen Vektor x aus dem Kern von A . O. B. d. A. ist $\|x\|_\infty = 1$. Man definiere die nichtleere Menge $M_1 := \{i \in M : |x_i| = 1\}$. Für $i \in M_1$ ist

$$|a_{ii}| = |a_{ii}| |x_i| = \left| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m a_{ij} x_j \right| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m |a_{ij}| |x_j| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m |a_{ij}| \leq |a_{ii}|.$$

Daher ist

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m |a_{ij}| = |a_{ii}|, \quad i \in M_1,$$

und folglich $M_2 := M \setminus M_1 \neq \emptyset$, da ein Index i_0 , für den beim schwachen Zeilensummenkriterium das strikte Ungleichheitszeichen gilt, nicht zu M_1 gehören kann. Da A unzerlegbar ist, existiert ein Indexpaar $(k, l) \in M_1 \times M_2$ mit $a_{kl} \neq 0$. Dann ist aber

$$|a_{kk}| = |a_{kk}| |x_k| = \left| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^m a_{kj} x_j \right| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^m |a_{kj}| |x_j| < \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^m |a_{kj}| \leq |a_{kk}|,$$

wobei wir zum Nachweis des strikten Ungleichheitszeichens $|a_{kl}| |x_l| < |a_{kl}|$ ausgenutzt haben. Damit haben wir den gewünschten Widerspruch erreicht und nachgewiesen, dass der Kern von A trivial bzw. A nichtsingulär ist.

Als nächstes zeigen wir:

- Ist $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ nicht zerlegbar und genügt A dem schwachen Zeilensummenkriterium, sind ferner die Diagonalelemente von A positiv und die Außerdiagonalelemente von A nichtpositiv, so ist A^{-1} nichtnegativ.

Denn: Wir zeigen, dass für nichtnegatives $b \in \mathbb{R}^m$ die Lösung x von $Ax = b$ nichtnegativ ist. Dies ist offenbar äquivalent dazu, dass A^{-1} nichtnegativ ist. Sei also $b \in \mathbb{R}^m$ ein nichtnegativer Vektor bzw. alle Komponenten von b nichtnegativ. Man beachte, dass wegen des schwachen Zeilensummenkriteriums und der Voraussetzung an die Vorzeichen der Einträge von A offenbar $\sum_{j=1}^m a_{ij} \geq 0$, $i = 1, \dots, m$, und für wenigstens ein i die Summe der Einträge in der i -ten Zeile sogar positiv ist. Sei x die Lösung von $Ax = b$. Man definiere

$$M_1 := \left\{ i \in M : x_i = \min_{j=1, \dots, m} x_j \right\}, \quad M_2 := M \setminus M_1.$$

Natürlich ist $M_1 \neq \emptyset$. Ist $M_1 = M$, so ist $x = \alpha e$, wobei e der Vektor ist, dessen Komponenten alle gleich 1 sind. Wegen $\alpha Ae = b \geq 0$ ist $\alpha \geq 0$, da alle Komponenten von Ae nichtnegativ und mindestens eine positiv ist. In diesem Falle ist also $x \geq 0$. Wir nehmen daher jetzt an, M_1 sei eine echte Teilmenge von M und daher M_1, M_2 eine nichttriviale Zerlegung von A . Da A unzerlegbar ist, existiert ein Indexpaar $(k, l) \in M_1 \times M_2$ mit $a_{kl} \neq 0$. Dann ist

$$(*) \quad 0 \leq b_k = \sum_{j=1}^m a_{kj} x_j = a_{kk} x_k + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^m a_{kj} x_j \leq a_{kk} x_k + \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^m a_{kj} \right) x_k = \left(\sum_{j=1}^m a_{kj} \right) x_k.$$

Angenommen, es wäre $\sum_{j=1}^m a_{kj} = 0$. Dann wäre $a_{kj}(x_k - x_j) = 0$, $j = 1, \dots, m$, andererseits aber $a_{kl}(x_k - x_l) > 0$, da jeder der beiden Faktoren negativ ist. Folglich folgt aus (*), dass $x_k \geq 0$ bzw. x ein nichtnegativer Vektor ist. Damit ist die Aussage bewiesen.

Nun zeigen wir:

- Ist $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ nicht zerlegbar und genügt A dem schwachen Zeilensummenkriterium, ist ferner A symmetrisch und die Diagonalelemente von A positiv, so ist A positiv definit.

Denn: Wir zeigen, dass alle Eigenwerte von A nichtnegativ sind. Da wir schon wissen, dass A nichtsingulär bzw. 0 kein Eigenwert von A ist, ist die Behauptung dann bewiesen. Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von A (man beachte: die Eigenwerte einer symmetrischen Matrix sind sämtlich reell) und x ein zugehöriger Eigenvektor, der durch $\|x\|_\infty = 1$ normiert sei. Nun wähle man $i \in \{1, \dots, m\}$ mit $|x_i| = 1$. Aus

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m a_{ij} x_j + a_{ii} x_i = \lambda x_i$$

erhält man

$$|\lambda - a_{ii}| = |\lambda - a_{ii}| |x_i| = \left| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m a_{ij} x_j \right| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m |a_{ij}| |x_j| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m |a_{ij}| \leq |a_{ii}| = a_{ii}.$$

Hieraus folgt $\lambda \in [0, 2a_{ii}]$. Insbesondere ist jeder Eigenwert von A nichtnegativ bzw. sogar positiv, folglich A positiv definit. \square

Die obige Blocktridiagonalmatrix ist wegen des letzten Satzes nichtsingulär, positiv definit, ferner ist A^{-1} nichtnegativ. Zur Lösung des linearen Gleichungssystems $Au = b$ können viele der Verfahren, die in einer Vorlesung über Numerische Mathematik besprochen werden, herangezogen werden. Man beachte aber, dass die Dimension der Gleichungssysteme n^2 ist, so dass schon sehr bald direkte Verfahren wie das Gaußsche Eliminationsverfahren und Varianten aus Speicherplatzgründen nicht mehr in Frage kommen.

Beispiel: Durch das folgende kleine *Mathematica*-Programm haben wir für $n := 10$ (man erhält dann immerhin schon ein lineares Gleichungssystem mit 100 Unbekannten) und $f(x, y) := \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ die Koeffizientenmatrix A und die rechte Seite b aufgebaut. Hierbei wird am Anfang ein Zusatzpaket geladen, durch welche die Funktionen `ZeroMatrix` und `BlockMatrix` bereitgestellt werden.

```
<<LinearAlgebra`MatrixManipulation`
n=10;h=1/(n+1);f[x_,y_]:=0.5*(x^2+y^2);
an=Table[Switch[j-i,-1,-1,0,4,1,-1,_,0],{i,n},{j,n}];
in=IdentityMatrix[n];
zeron=ZeroMatrix[n];
a=Table[Switch[j-i,-1,-in,0,an,1,-in,_,zeron],{i,n},{j,n}];
a=BlockMatrix[a];
b=Table[0,{n^2}];
Do[{b[[i]]}=f[i*h,0],b[[(n-1)*n+i]]=f[i*h,(n+1)*h],
b[[(i-1)*n+1]]=f[0,i*h],b[[i*n]]=f[(n+1)*h,i*h]},{i,2,n-1}];
b[[1]]=f[0,h]+f[h,0];b[[n]]=f[(n+1)*h,h]+f[n*h,0];
b[[(n-1)*n+1]]=f[0,n*h]+f[h,(n+1)*h];
b[[n^2]]=f[n*h,(n+1)*h]+f[(n+1)*h,n*h];
```

Durch `u=LinearSolve[a,b]` erhält man die Lösung des linearen Gleichungssystems $Au = b$. Die Lösung ist natürlich ein Vektor, was man auch dadurch feststellen kann, dass man den Befehl `VectorQ[u]` gibt und die Antwort `True` erhält. Aus dem Vektor kann eine Matrix durch den Befehl `u=Partition[u,n]` gemacht werden. Durch `ListPlot3D[u]` kann man einen dreidimensionalen Plot dieser Matrix machen (hier wird also auf dem Gitter $\{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\}$ der Wert $u_{i,j}$ aufgetragen) und erhält das in Abbildung 6.12 angegebene Bild. \square

Da man sehr schnell zu hochdimensionalen Gleichungssystemen kommt und außerdem durch direkte Verfahren i. Allg. nicht die spezielle Struktur der Koeffizientenmatrix ausgenutzt wird, werden sehr häufig iterative Verfahren auf die linearen Gleichungssysteme angewandt, die aus einer Diskretisierung etwa der Laplace-Gleichung (und anderer partieller Differentialgleichungen) resultieren. Bei den klassischen Iterationsverfahren wird das lineare Gleichungssystem äquivalent als eine Fixpunktaufgabe $Bu = (B - A)u + b$ geschrieben. Hierbei sollte B nichtsingulär sein, Gleichungssysteme mit B als Koeffizientenmatrix "leicht lösbar sein" und $B \approx A$ sein. Iteriert wird nach der Vorschrift $Bu^{k+1} = (B - A)u^k + b$ bzw. $u^{k+1} = Mu^k + c$ mit der Iterationsmatrix $M = I - B^{-1}A$

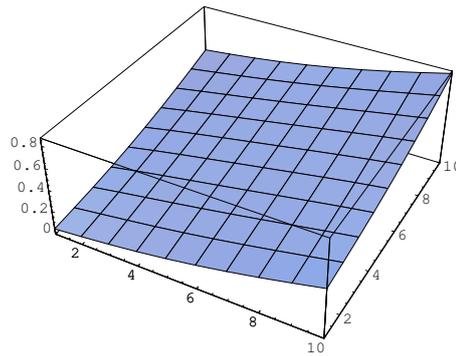


Abbildung 6.12: Ein Plot zur Lösung des Dirichlet-Problems

und $c = B^{-1}b$. In einer Vorlesung “Numerische Mathematik I” wird im Zusammenhang mit Iterationsverfahren bei linearen Gleichungssystemen gezeigt (wir begnügen uns mit einer hinreichenden Konvergenzbedingung):

Satz 3.3 Gegeben sei die Fixpunktaufgabe $u = Mu + c$ mit $M \in \mathbb{R}^{m \times m}$ und $c \in \mathbb{R}^m$. Hierzu betrachte man mit einem Startelement $u^0 \in \mathbb{C}^m$ das Iterationsverfahren $u^{k+1} = Mu^k + c$. Ist $\rho(M) < 1$, der Spektralradius der Iterationsmatrix M also kleiner als 1 bzw. alle Eigenwerte von $I - B^{-1}A$ betragsmäßig kleiner als 1, so konvergiert die Folge $\{u^k\}$ für jedes Startelement u^0 gegen die Lösung u^* der Fixpunktaufgabe $u = Mu + c$.

In einer Vorlesung über Numerische Mathematik wird i. Allg. auf das Gesamtschrittverfahren (Jacobi), das Einzelschrittverfahren (Gauß-Seidel) und das SOR-Verfahren eingegangen. Hierbei denkt man sich die Matrix A durch $A = A_L + A_D + A_R$ zerlegt, wobei A_L der strikte linke Teil von A ist (alles unterhalb der Diagonalen, aufgefüllt durch Nullen), $A_D = \text{diag}(A)$ der Diagonalanteil (in unserem Fall ist $A = 4I$) und A_R der strikte rechte Teil von A . Dann ist:

1. Gesamtschrittverfahren: Hier ist $B := A_D$ und daher

$$G := I - B^{-1}A = -A_D^{-1}(A_L + A_R).$$

2. Einzelschrittverfahren: Hier ist $B := A_D + A_L$ und daher

$$E := I - B^{-1}A = -(A_D + A_L)^{-1}A_R.$$

3. SOR-Verfahren: Mit einem geeigneten Parameter $\omega \in (0, 2)$ ist hier $B(\omega) := (1/\omega)A_D + A_L$ und daher

$$E(\omega) := I - B(\omega)^{-1}A = (I + \omega A_D^{-1}A_L)^{-1}((1 - \omega)I - \omega A_D^{-1}A_R).$$

Man versucht, eine Iterationsmatrix mit einem möglichst kleinen Spektralradius zu bestimmen, weil hierdurch, grob gesagt, der Fehler am stärksten gedämpft wird. Hierauf wollen wir aber nicht näher eingehen.

Beispiel: In der folgenden kleinen Tabelle stellen wir die Spektralradien der Iterationsmatrizen G bzw. E des Gesamtschritt- bzw. Einzelschrittverfahrens sowie von $\rho(E(\omega_b))$ (mit dem besten Relaxationsparameter ω_b) zusammen.

| n | $\rho(G)$ | $\rho(E)$ | $\rho(E(\omega_b))$ |
|-----|-----------|-----------|---------------------|
| 3 | 0.707107 | 0.500000 | 0.171573 |
| 5 | 0.866025 | 0.750000 | 0.333333 |
| 10 | 0.959493 | 0.920627 | 0.560388 |

In Abbildung 6.13 haben wir auf dem Intervall $[0, 2]$ den Spektralradius der Iterationsmatrix $E(\omega)$ des SOR-Verfahrens in Abhängigkeit von ω aufgetragen, und zwar für $n = 3$, $n = 5$ und $n = 10$. Diese Plots haben wir auf etwas "brutale" Weise mit

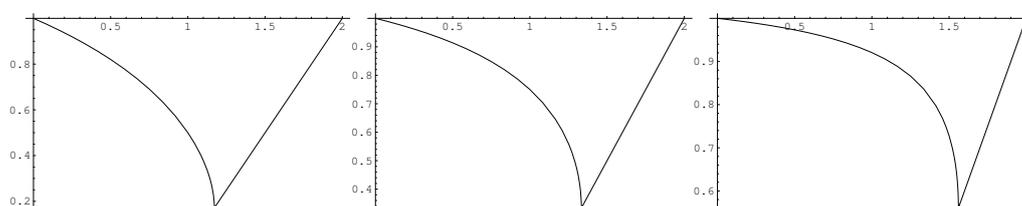


Abbildung 6.13: $\rho(E(\omega))$ auf $[0, 2]$ für $n = 3, 5, 10$

Mathematica auf die folgende Weise hergestellt:

```
<<LinearAlgebra`MatrixManipulation`
n=5 ;
an=Table[Switch[j-i,-1,-1,0,4,1,-1,_,0],{i,n},{j,n}];
in=IdentityMatrix[n];
zeron=ZeroMatrix[n];
a=Table[Switch[j-i,-1,-in,0,an,1,-in,_,zeron],{i,n},{j,n}];
a=BlockMatrix[a];einsetz[i_,j_]:=a[[i,j]];
id=IdentityMatrix[n^2];
ad=4*id;
al=LowerDiagonalMatrix[einsetz,n^2]-ad;
ar=UpperDiagonalMatrix[einsetz,n^2]-ad;
rhoe[omega_]:=
  Max[Abs[Eigenvalues[
    Inverse[id+0.25*omega*al].((1-omega)*id-0.25*omega*ar)]]];
Plot[rhoe[omega],{omega,0,2}]
```

Für die obige Matrix A , die beim Dirichlet-Problem für die Laplace-Gleichung auf dem Einheitsquadrat auftritt, kann man den besten Relaxationsparameter ω_b ausrechnen, und zwar ist er durch $\omega_b := 1/(1 + \sin(\pi/n + 1))$ gegeben. Als entsprechenden Spektralradius berechnet man dann $\rho(E(\omega_b)) = (1 - \sin(\pi/n + 1))/(1 + \sin(\pi/n + 1))$. In der obigen Tabelle haben wir die entsprechenden Werte eingetragen. \square

Nur erwähnt sei, dass wegen der positiven Definitheit auch andere Iterationsverfahren wie das Verfahren der konjugierten Gradienten (mit sogenannter Prädiktionierung) eingesetzt werden können.

6.3.2 Aufgaben

1. Sei $\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x, y < 1\}$ das Einheitsquadrat, mit $\partial\Omega$ sei der Rand von Ω bezeichnet. Gegeben sei das Dirichlet-Problem für die Laplace-Gleichung, gesucht ist also $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ mit $\Delta u = 0$ in Ω und $u = f$ auf $\partial\Omega$ bei gegebenem $f \in C(\Omega)$. In Abbildung 6.14 ist ein Gitter zur Maschenweite $h = 1/4$ eingetragen, wobei die inneren

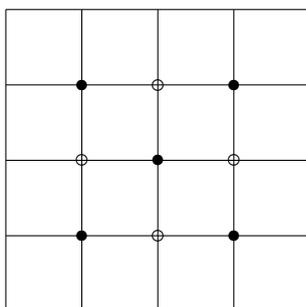


Abbildung 6.14: Schachbrettartiges Gitter

Gitterpunkte schachbrettartig in zwei Klassen zerlegt und deren Elemente durch \bullet bzw. \circ bezeichnet seien. Nach Diskretisierung mit dem 5-Punkt Differenzenstern stelle man das zugehörige lineare Gleichungssystem auf. Welche Aussagen können Sie über die Koeffizientenmatrix beweisen?

2. Eine Tridiagonalmatrix ist genau dann nicht zerfallend, wenn jedes ihrer Nebendiagonalelemente von Null verschieden ist.
3. Die Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ genüge dem *starken Zeilensummenkriterium*, d. h. es sei

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| < |a_{ii}|, \quad i = 1, \dots, n.$$

Man zeige:

- (a) Die Matrix A ist nichtsingulär.
- (b) Mit der Iterationsmatrix $G := -A_D^{-1}(A_L + A_R)$ des Gesamtschrittverfahrens ist die affin lineare Abbildung $F(x) := Gx + c$ auf dem \mathbb{R}^n kontrahierend bezüglich $\|\cdot\|_\infty$, d. h. es existiert eine Konstante $L < 1$ mit

$$\|F(x) - F(y)\|_\infty \leq L \|x - y\|_\infty \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Für $x = (x_j) \in \mathbb{R}^n$ ist hierbei $\|x\|_\infty$ definiert durch

$$\|x\|_\infty := \max_{j=1, \dots, n} |x_j|.$$

4. Gegeben sei das Dirichlet-Problem für die Laplace-Gleichung auf dem Einheitsquadrat Ω , gesucht ist also $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ mit $\Delta u = 0$ und $u = f$ auf $\partial\Omega$ mit vorgegebenen Randdaten $f \in C(\partial\Omega)$. Mit der Maschenweite $h := 1/(n+1)$ diskretisiere man den Laplace-Operator mit Hilfe des 5 Punkt-Differenzensterns und gelange, wie in der Vorlesung beschrieben, zum linearen Gleichungssystem $Au = b$. Man zeige, dass

$$\min_{(x,y) \in \partial\Omega} f(x,y) \leq u_{i,j} \leq \max_{(x,y) \in \partial\Omega} f(x,y), \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

5. Für $n \in \mathbb{N}$ definiere man $A \in \mathbb{R}^{n^2 \times n^2}$ durch

$$A := \begin{pmatrix} A_n & -I_n & \cdots & 0 \\ -I_n & A_n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -I_n \\ 0 & \cdots & -I_n & A_n \end{pmatrix}$$

mit der Tridiagonalmatrix

$$A_n := \begin{pmatrix} 4 & -1 & \cdots & 0 \\ -1 & 4 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

und der $n \times n$ -Einheitsmatrix I_n . Weiter sei

$$H := \begin{pmatrix} H_n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & H_n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & H_n \end{pmatrix}, \quad V := \begin{pmatrix} V_n & -I_n & \cdots & 0 \\ -I_n & V_n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -I_n \\ 0 & \cdots & -I_n & V_n \end{pmatrix}$$

mit

$$H_n := \begin{pmatrix} 2 & -1 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad V_n := \begin{pmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Man zeige:

- (a) Die symmetrischen Matrizen H und V besitzen ein gemeinsames System von Eigenvektoren, nämlich die Vektoren $u^{p,q}$, $p, q = 1, \dots, n$, mit

$$u_{i,j}^{p,q} := \sin \frac{ip\pi}{n+1} \sin \frac{jq\pi}{n+1}, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

mit den zugehörigen Eigenwerten

$$\lambda_{pq} := 4 \sin^2 \frac{p\pi}{2(n+1)}, \quad \mu_{pq} = 4 \sin^2 \frac{q\pi}{2(n+1)}, \quad p, q = 1, \dots, n.$$

- (b) Ist $b \in \mathbb{R}^{n^2}$ vorgegeben, so konvergiert für einen beliebigen Startwert $u^0 \in \mathbb{R}^{n^2}$ und jedes $r > 0$ die durch die Vorschriften

$$(H + rI)u^{k+1/2} = (rI - V)u^k + b, \quad (V + rI)u^{k+1} = (rI - H)u^{k+1/2} + b$$

gewonnene Folge $\{u^k\}$ gegen die eindeutige Lösung u^* von $Au = b$.

