Der goldene Schnitt

Jochen Werner

Inhaltsverzeichnis

In dieser Vorlesung will ich einige “merkwürdige” Dinge über den goldenen Schnitt erzählen. Vor über 20 Jahren habe ich das erste Mal in einer abschließenden Vorlesung (über Numerische Mathematik oder Optimierung, ich weiß es nicht mehr) über Fibonacci-Zahlen und den goldenen Schnitt berichtet. Seitdem ist es durch das Internet und Suchmaschinen[1] viel einfacher geworden, interessante Informationen[2] (nicht nur) hierzu zu gewinnen. Außerdem ist inzwischen (sogar schon in zweiter Auflage) das Buch von A. Beutelspacher, B. Petri (1996) über den goldenen Schnitt herausgekommen, welches auch ein sehr reichhaltiges Literaturverzeichnis besitzt. Mit dieser verbesserten Quellenlage soll eine verbesserte Neuauflage der damaligen Vorlesung versucht werden.

1 Definition und Konstruktion

Man sagt, eine Strecke sei nach dem *goldenen Schnitt* in zwei Teile geteilt, wenn sich die gesamte Strecke zum größeren Teil verhält wie dieser zum kleineren. Hat man also eine Strecke der Länge L, so bestimmt sich die Länge l der größeren nach dem goldenen Schnitt geteilten Strecke aus

$$\frac{L}{l} = \frac{l}{L-l}.$$

Hieraus erhält man für das “Goldene-Schnitt-Verhältnis” L/l die Gleichung

$$\frac{L}{l} = \frac{1}{L/l-1} \qquad \text{bzw.} \qquad \left(\frac{L}{l}\right)^2 - \frac{L}{l} = 1.$$

Von den beiden Lösungen dieser quadratischen Gleichung ist natürlich nur die positive relevant, so dass

$$\frac{L}{l} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad \text{bzw.} \qquad l = \frac{\sqrt{5}-1}{2}L.$$

Die Zahl[3]

$$\phi := \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.6180339887498948482\cdots$$

[1] Gibt man der Suchmaschine Google den Suchbegriff “Goldener Schnitt“ ein, so erhält man 171 000 Seiten, bei “Golden Section“ sind es 846 000, bei “Golden Ratio“ sogar 2 580 000.

[2] Siehe z. B. `http://mathworld.wolfram.com/GoldenRatio.html`

und

`http://www.geometry.net/math_discover/golden_ratio.html`

[3] Die Bezeichnung ϕ für die Goldene-Schnitt-Zahl soll den griechischen Bildhauer Phidias (er lebte etwa von 490/80 bis 430/20 v. Chr.) ehren, der in seinen Skulpturen, aber vor allem beim Bau des Parthenon (Beginn 449 v. Chr.) den goldenen Schnitt angwandt haben soll, siehe D. E. Knuth (1997, S. 81). Allerdings ist Phidias nicht Baumeister des Parthenon gewesen, auch seine Beteiligung bei der Ausgestaltung der Friese und Giebel ist nicht gesichert. Er könnte allerdings (hierfür gibt es nur Plutarch als Quelle) eine Art Oberaufseher über alle beim Bau des Parthenon beteiligten Künstler gewesen sein.

heißt die *Goldene-Schnitt-Zahl*[4]. Dieses Verhältnis bzw. Proportion (goldener Schnitt, stetige Teilung, sectio aurea, divina proportione, section d'or, golden section, golden ratio) hat seit Jahrhunderten nicht nur Mathematiker und Mathematikerinnen fasziniert. Etwas überhöht ausgedrückt (Lexikon der Kunst (in 4 Bänden) Band II, Leipzig 1976):

- Der Mensch empfindet den goldenen Schnitt als besonders harmonisch, da er vermutlich als die geistig sinnliche Umsetzung von Modellvorstellungen entstanden ist, die sich beim Menschen bei der praktischen Aneignung der Wirklichkeit gebildet haben.

Wir wollen auf das Auftreten der "goldenen Proportion" ϕ in Kunst, Architektur und Natur kaum eingehen, sondern verweisen auf die Kapitel 9 und 10 bei A. Beutelspacher, B. Petri (1996) sowie auf die vielen Webseiten, die man durch entsprechende Anfragen bei z. B. Google erhält. Erwähnt sei nur, dass die vier Linien, die man durch Teilung der Seiten eines Rechtecks nach dem goldenenen Schnitt erhält (siehe Abbildung 1 links, hier sind wir von einem Rechteck im DIN-Format ausgegangen) von O.

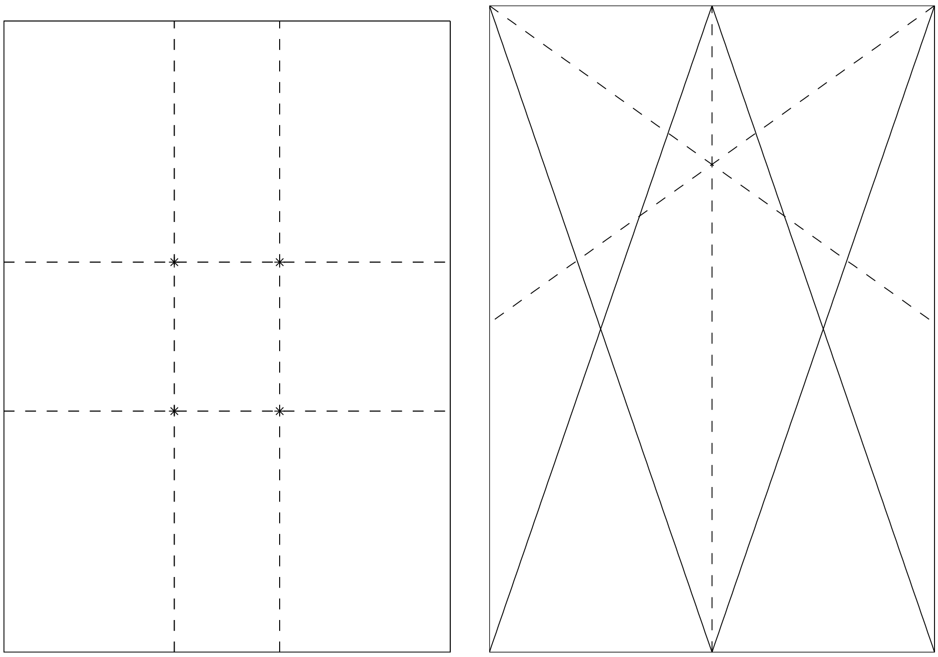

Abbildung 1: Goldene Linien und Punkte in einem DIN-Rechteck (links), "Konstruktion" der Mona Lisa (rechts)

Hagenmaier (1949) *goldene Linien*, ihre Schnittpunkte als *goldene Punkte* bezeichnet werden. Dort kann man nachlesen:

[4]Unter

`http://www.cs.arizona.edu/icon/oddsends/phi.htm`

findet man die ersten 5 000 Stellen von ϕ.

- Die so gewonnenen “Goldenen Linien” und “Goldenen Punkte” sind für den Bildaufbau von besondere Bedeutung. Einer, manchmal auch mehreren Goldenen Linien kommt eine anordnende Teilung im Bildaufbau zu, währenddessen einer oder mehrere der Goldenen Punkte für den Bildaufbau insofern wichtig sein können, als ein dort angebrachter Gegenstand oder Farbfleck den Bildeindruck wesentlich beeinflusst.

Von Hagenmaier wird auch behauptet, dass Leonardo da Vinci seine Bilder konstruktiv aufbaute und z. B. bei der “Konstruktion” der Mona Lisa zwei Goldene Dreiecke (das sind gleichschenklige Dreiecke, bei denen das Verhältnis zwischen Schenkellänge und Länge der Basisseite gerade ϕ ist), deren Basislänge die Breite des Bildes (53 cm) ist, benutzte. Ganz kann das nicht hinkommen, denn bei einer Basislänge von 53 cm wäre die Höhe eines goldenen Dreiecks $53\sqrt{\phi^2 - \frac{1}{4}}\,\mathrm{cm} \approx 81.5\,\mathrm{cm}$, während die Höhe des Mona-Lisa-Bildes lediglich 77 cm ist. In Abbildung 1 rechts haben wir in ein Rechteck, bei welchem das Verhältnis zwischen Höhe und Breite 77/53 ist, zwei Dreiecke eingezeichnet, die näherungsweise goldene Dreiecke sind. Die gestrichelten Linien treffen sich in dem magischen linken Auge der Mona Lisa.

Bei Euklid[5] (Elemente VI, Def. 3)[6] wird die stetige Teilung (bzw. der Goldene Schnitt) definiert (und zwar genau wie oben). Schon vorher kommt aber bei Euklid in Buch II, 11 die folgende Aufgabe vor:

- Eine gegebene Strecke ist so zu teilen, dass das Rechteck aus der ganzen Strecke und dem einen Abschnitt dem Quadrat über dem anderen Abschnitt gleich ist.

Hierbei ist bei Euklid natürlich eine geometrische Konstruktion mit Zirkel und Lineal zur Bestimmung des gesuchten “Schnittes” gemeint. Klar ist, dass diese Aufgabe auf eine Teilung der Strecke nach dem goldenen Schnitt hinausläuft[7]. Denn: Sei L die Länge der ganzen Strecke. Dann bestimmt sich die Seitenlänge l des Quadrates aus

$$L(L-l) = l^2 \qquad \text{bzw.} \qquad \left(\frac{L}{l}\right)^2 - \frac{L}{l} = 1.$$

[5] Aus einem Lexikon der Schulmathematik: Euklid lebte im 4. Jahrhundert v.Chr. (365? bis 300?), lehrte in Alexandria Mathematik und sammelte in seinen Elementen das Wissen seiner Zeit. Die Inhalte der Bücher I-IV (ebene Geometrie) und VII-IX (Zahlentheorie) werden heute den Pythagoreern zugeschrieben, während V (Ausdehnung der Größenlehre auf Irrationalitäten) und XII (Stereometrie) auf Eudoxos, X (Irrationalitäten) und XIII (Reguläre Polyeder) auf Theaitetos zurückgehen Die Bücher XIV und XV stammen aus späterer Zeit, XIV stammt von Hypsikles (2. Jahrhundert v. Chr.) und XV von Demaskios (6. Jahrhundert n. Chr.). Die Elemente zeigen den hohen Stand der griechischen Mathematik jener Zeit. Mit den Definitionen, Axiomen und Postulaten hatte sie sich zu einer deduktiven, mit strengen Beweisen arbeitenden Wissenschaft entwickelt.

[6] Eine englische online Version der Elemente Euklids (Bücher I-XII) findet man unter der Adresse `http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/toc.html`

[7] Ein weiteres wichtiges Verhältnis ist das DIN-Format. Ein Rechteck mit Seitenlängen L und $l \leq L$ hat DIN-Format, wenn

$$\frac{L}{l} = \frac{l}{L/2} \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{L}{l} = \sqrt{2}.$$

Gleichbedeutend ist, dass das Halbieren einer Seite, welche DIN-Format hat, wieder ein DIN-Format ergibt. Ein Rechteck im DIN-Format mit einer Fläche von $1\,\mathrm{m}^2 = 10\,000\,\mathrm{cm}^2$, hat die Seitenlängen l (in cm) mit $\sqrt{2}l^2 = 100^2$, also $l = 100/2^{1/4} \approx 84.0896$ und $L = \sqrt{2}l \approx 118.9207$. Ein Rechteck mit

Dies ist genau die charakteristische quadratische Gleichung für die Goldene-Schnitt-Zahl ϕ.

Die Konstruktion bei Euklid zur Bestimmung des goldenen Schnittes verläuft folgendermaßen.

- Gegeben sei die Strecke AB, die nach dem goldenen Schnitt zu teilen ist.
- Konstruiere das Quadrat $ABDC$.
- Halbiere die Strecke AC im Punkte E.
- Schlage um E einen Kreis mit dem Radius $|EB|$ und finde den Punkt F als Schnittpunkt dieses Kreises mit der Verlängerung der Strecke CA über A hinaus.
- Schlage um A einen Kreis mit dem Radius $|AF|$ und finde den den Punkt P als Schnittpunkt mit der Strecke AB.
- Im Punkte P wird die Strecke AB nach dem goldenen Schnitt geteilt.

In Abbildung 2 wird diese Konstruktion verdeutlicht. Dass in der Tat die Strecke AB

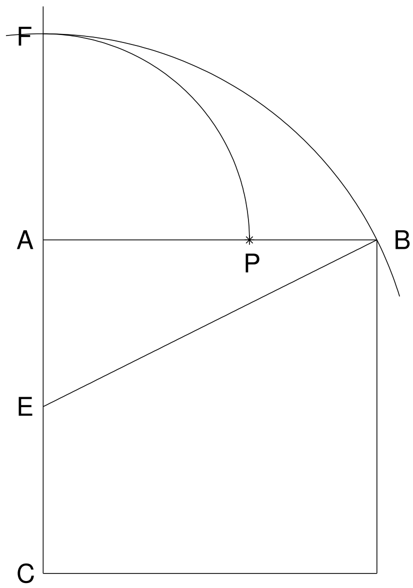

Abbildung 2: Konstruktion des goldenen Schnitts nach Euklid

diesen Maßen hat das Format DIN A0. Die ersten Formate sind daher

Format	hoch	breit
DIN A0	118.9	84.1
DIN A1	84.1	59.5
DIN A2	59.5	42.0
DIN A3	42.0	29.7
DIN A4	29.7	21.0

im Punkt P nach dem goldenen Schnitt geteilt wird, sieht man leicht ein. Denn mit Hilfe des Satzes von Pythagoras erhält man

$$|AP| = |AF| = |EF| - |AE| = |EB| - \frac{|AB|}{2} = \Big(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\Big)|AB| = \frac{|AB|}{\phi},$$

also $|AB|/|AP| = \phi$.

Eine weitere Konstruktion des goldenen Schnitts mit Zirkel und Lineal ist die folgende (sie wird bei A. Beutelspacher, B. Petri (1996, S. 21) als erste angegeben, weil sie wohl die einfachste ist):

- Gegeben sei die Strecke AB, die nach dem goldenen Schnitt zu teilen ist.
- Errichte in B die Senkrechte und trage darauf eine Strecke der Länge $|AB|/2$ ab, erhalte C.
- D sei Schnittpunkt des Kreises mit dem Radius $|CB| = |AB|/2$ um C und der Strecke AC.
- P sei Schnittpunkt des Kreises um A mit dem Radius AD und der Strecke AB.
- Im Punkte P wird die Strecke AB nach dem goldenen Schnitt geteilt.

Diese Konstruktion wird in Abbildung 3 angegeben. Auch diese Konstruktion ist leicht

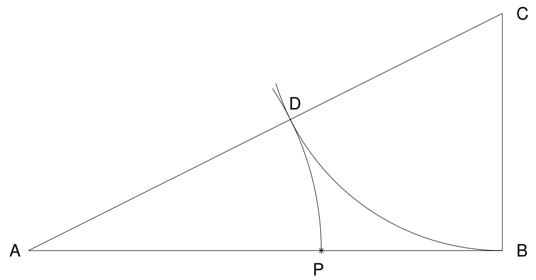

Abbildung 3: Eine weitere Konstruktion des goldenen Schnitts

zu rechtfertigen. Denn es ist

$$|AP| = |AD| = |AC| - |DC| = \frac{\sqrt{5}}{2}|AB| - \frac{|AB|}{2} = \Big(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\Big)|AB| = \frac{|AB|}{\phi},$$

woraus sich wieder die Behauptung ergibt.

Von G. Odom (1983) stammt die folgende Aufgabe:

- Let A and B be the midpoints of the sides EF and ED of an equilateral triangle DEF. Extend AB to meet the circumcircle (of DEF) at C. Show that B divides AC according to the golden section.

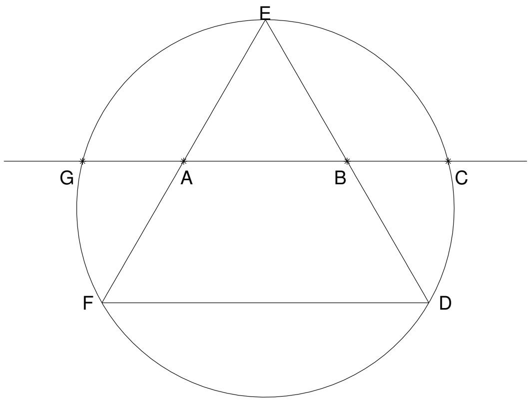

Abbildung 4: Die Aufgabe von G. Odom

Streng genommen handelt es sich hier also nicht um die Konstruktion des inneren goldenenen Schnittes, sondern des äußeren goldenen Schnittes. Abbildung 4 soll die Konstruktion verdeutlichen. Die Lösung der Aufgabe erschien übrigens im American Mathematical Monthly 93 (1986, S. 572), siehe auch A. Beutelspacher, B. Petri (1996, S. 23). Zunächst beachten wir, dass auch das Dreieck $\triangle ABE$ gleichseitig ist, was z. B. aus dem Strahlensatz folgt. Nun wenden wir den Sehnensatz an. Dieser sagt aus:

- Zieht man durch einen Punkt P in einem Kreis Sehnen, so sind die Produkte der Längen der von P aus gemessenen Abschnitte auf den Sehnen gleich, siehe Abbildung 5.

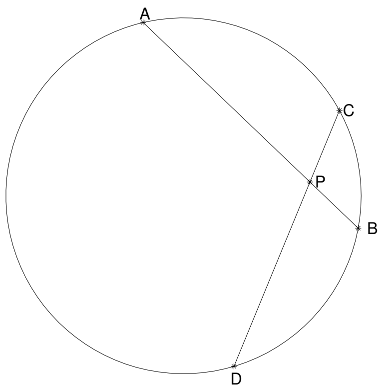

Abbildung 5: Der Sehnensatz: $|AP|\,|PB| = |CP|\,|PD|$

Bei der Anwendung spielt B die Rolle von P, die beiden Sehnen sind ED und GC, ihre Abschnitte EB und BD bzw. BC und GB. Hiernach ist dann

$$(*) \quad |AB|^2 = |EB|\,|BD| = |BC|\,|GB| = |BC|(|AB| + |GA|) = |BC|(|AB| + |BC|).$$

Folglich ist

$$\Big(\frac{|AC|}{|AB}\Big)^2 - \frac{|AC|}{|AB|} \;=\; \Big(\frac{|AB| + |BC|}{|AB|}\Big)^2 - \frac{|AB| + |BC|}{|AB|}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\frac{|BC|}{|AB|}\right)^2 + \frac{|BC|}{|AB|} \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

Folglich ist $|AC|/|AB| = \phi$ und $|BC|/|AB| = 1/\phi$ bzw. $|AB|/|BC| = \phi$.

Nach Lorenzo Mascheroni[8](*1750, †1800) lässt sich jede Konstruktion, die mit Zirkel und Lineal gemacht werden kann, auch alleine mit dem Zirkel durchführen[9]. Die Konstruktion kann folgendermaßen verlaufen:

- Gegeben sei die Strecke AB, die nach dem goldenen Schnitt zu teilen ist.
- Schlage um A und B jeweils den Kreis mit dem Radius $|AB|$ und bestimme die Schnittpunkte J und K dieser beiden Kreise.
- Sei L Schnittpunkt des Kreises um J mit dem Radius JK und des Kreises um A mit dem Radius $|AB|$.
- Seien N und M Schnittpunkte des Kreises um B mit dem Radius $|JK|$ und des Kreises um A mit dem Radius $|AB|$.
- Sei O Schnittpunkt des Kreises um L mit dem Radius $|JK|$ und des Kreises um B mit dem Radius $|JK|$.
- Sei P der Schnittpunkt der Kreise um M bzw. N mit dem Radius AO.
- Im Punkte P wird die Strecke AB nach dem goldenen Schnitt geteilt.

Diese Konstruktion wird in Abbildung 6 durchgeführt. Natürlich wollen wir diese jetzt auch noch rechtfertigen, also zeigen, dass die Strecke AB in P nach dem goldenen Schnitt geteilt wird. Zunächst ist klar, dass P wirklich auf der Strecke AB liegt (ein analytischer Beweis ist ganz einfach). Wir lassen aus Abbildung 6 die meisten Kreise fort und ziehen die Strecke LB, zeichnen ferner den Schnittpunkt von MN und LB ein, den wir Q nennen, siehe Abbildung 7. Es ist

$$|AB| = |BJ| = |JM| = |ML| = |LN| = |AJ| = |AM| = |AL| = |AN.$$

Ferner ist

$$|AQ| = |QL| = \frac{|AB|}{2}.$$

[8]Bekannt ist Mascheroni auch durch die Euler-Mascheroni-Konstante

$$C := \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n\right).$$

[9]Das Buch *Geometria del compasso* (1797), in dem dies gezeigt wurde, ist übrigens in Versform geschrieben und Napoleon Bonaparte gewidmet. Mascheroni war nicht bekannt, dass sein Ergebnis schon früher (1672) von dem dänischen Mathematiker Georg Mohr (*1640, †1697) bewiesen war. Das wurde überhaupt erst bekannt, als dessen Buch *Euclides Danicus* 1927 von einem Studenten der Kopenhagener Universität in einem Antiquariat entdeckt wurde.

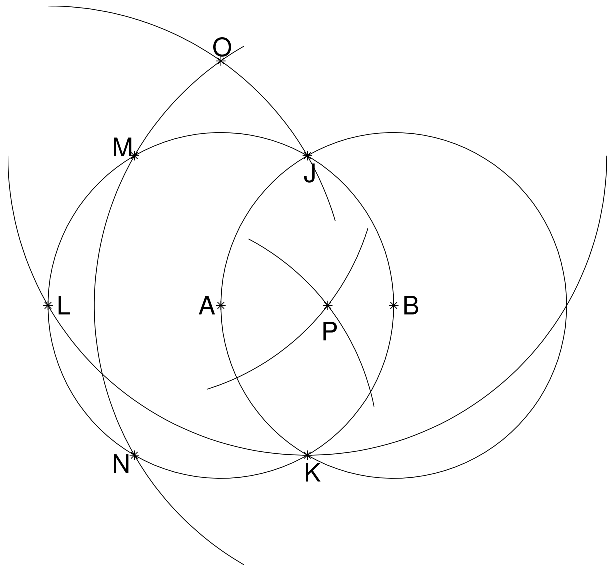

Abbildung 6: Konstruktion des goldenen Schnitts mit dem Zirkel

Wendet man den Satz von Pythagoras auf $\triangle MQA$ an, so erhält man

$$|QM|^2 = |AM|^2 - |QA|^2 = |AB|^2 - \frac{|AB|^2}{4}$$

und damit $|QM| = (\sqrt{3}/2)|AB|$. Ebenfalls wegen des Satzes von Pythagoras ist

$$\left(\frac{|JK|}{2}\right)^2 + \left(\frac{|AB|}{2}\right)^2 = |AB|^2$$

und daher $|JK| = \sqrt{3}|AB|$. Nach Konstruktion ist O Schnittpunkt der Kreise um L bzw. B mit dem Radius $|JK|$. Daher ist

$$|MN| = 2|QM| = \sqrt{3}|AB| = |JK| = |LO| = |BO|.$$

Ebenfalls nach Konstruktion ist P Schnittpunkt der Kreise um M bzw. N mit dem Radius $|OA|$, so dass $|MP| = |NP| = |OA|$. Wendet man den Satz von Pythagoras auf $\triangle OAB$ an, so erhält man

$$|OA|^2 + |AB|^2 = |OB|^2 = 3|AB|^2.$$

Folglich ist

$$|MP| = |NP| = |OA| = \sqrt{2}|AB|.$$

Eine Anwendung des Satzes von Pythagoras auf $\triangle MQP$ ergibt

$$2|AB|^2 = |MP|^2 = |MQ|^2 + |QP|^2 = \frac{3}{4}|AB|^2 + \left(\frac{1}{2}|AB| + |AP|\right)^2$$

und damit

$$\frac{\sqrt{5}}{2}|AB| = \frac{1}{2}|AB| + |AP|.$$

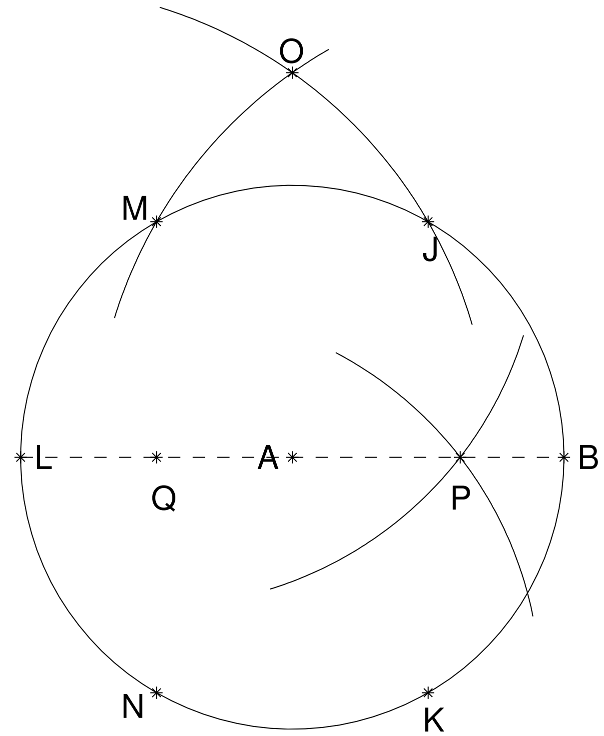

Abbildung 7: Konstruktion des goldenen Schnitts mit dem Zirkel: Rechtfertigung

Daher ist

$$|AP| = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})|AB| = \frac{|AB|}{\phi},$$

womit bewiesen ist, dass die Strecke AB in P nach dem goldenen Schnitt geteilt wird.

1.1 Aufgaben

1. Man rechtfertige die folgende Konstruktion:

   - Gegeben sei eine Strecke AP.
   - Man errichte in P das Lot PC mit $|PC| = |AP|$.
   - Man bestimme den Mittelpunkt D der Strecke AP. Man bestimme den Schnittpunkt B des Kreises um D mit dem Radius $|DC|$ und der Verlängerung der Strecke AP über P hinaus.
   - Die Strecke AB wird in P nach dem goldenen Schnitt geteilt.

   In Abbildung 8 wird die Konstruktion verdeutlicht.

2. Man löse das sogenannte *Napoleonische Problem*. Bei diesem sind auf einem gegebenen Kreis um den Punkt O alleine mit Hilfe eines Zirkels vier Punkte A, B, C, D zu finden derart, dass $ABCD$ ein Quadrat bilden.

3. Man betrachte die folgende Konstruktion (siehe K. Hofstetter (2002)):

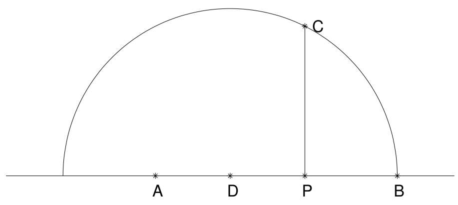

Abbildung 8: Konstruktion des “äußeren goldenen Schnitts”

- Gegeben seien zwei Punkte A und B.
- Seien C und D Schnittpunkte der beiden Kreise um A bzw. B, welche jeweils den Radius $|AB|$ haben.
- Seien E und F Schnittpunkte der beiden Kreise mit der Geraden durch A und B.
- Seien X und Y Schnittpunkte der beiden Kreise um A bzw. B, jeweils mit dem Radius $|EF|$.

Siehe Abbildung 9 links.

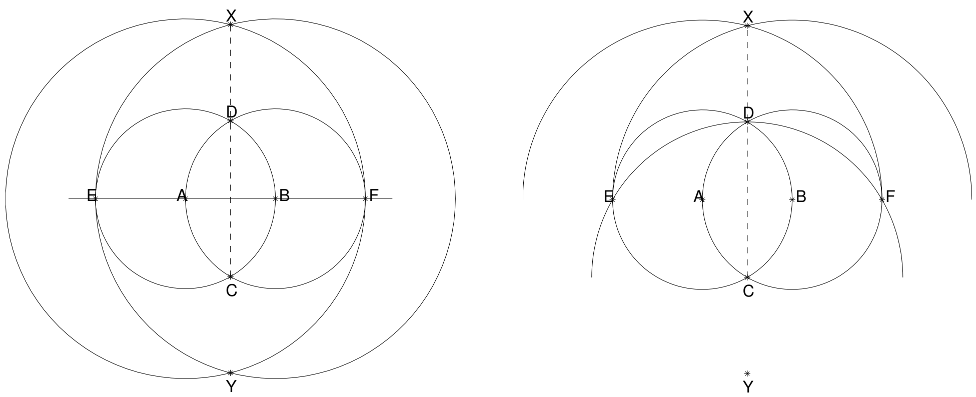

Abbildung 9: Konstruktion des goldenen Schnitts nach Hofstetter

(a) Man zeige, dass die Strecke CX in D nach dem goldenen Schnitt geteilt wird.

(b) Die Gerade durch A und B kann durch einen Kreis um C mit dem Radius $|CD|$ ersetzt werden, siehe Abbildung 9 rechts.

2 Die Fibonacci-Zahlen

Wir werden uns im folgenden zwar auf den goldenen Schnitt konzentrieren, können aber den engen Zusammenhang mit den Fibonacci-Zahlen nicht außer acht lassen.

Leonardo Pisano Fibonacci (*1170, †1750)[10] kann als der erste große Mathematiker des christlichen Abendlandes angesehen werden. Er stammt aus einer Kaufmannsfamilie mit dem Namen Bonacci. Leonardo gibt Einzelheiten zu seinem Leben in seinem

[10]Biographisches zu Fibonacci und einiges über seine wissenschaftlichen Leistungen kann man unter `http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Fibonacci.html` nachlesen.

berühmtesten Buch, dem *Liber abaci* (1202) wieder. Sein Vater wird beauftragt, die Handelsvertretung der Republik Pisa in Bugia (jetzt Bejaia im nordöstlichen Algerien) zu leiten. Leonardo lernt dort und auf vielen Reisen (Ägypten, Syrien, Griechenland, Sizilien, Provence) die "Rechenkunst" der Araber und die griechische Mathematik kennen (Euklids Elemente kannte er sehr genau). Gegen 1200 kehrt Leonardo nach Pisa zurück. Für die nächsten 25 Jahre ist er offenbar so etwas wie ein Privatgelehrter. Er schreibt Bücher über "Kaufmännisches Rechnen", aber auch über algebraische und geometrische Probleme. 1225 wird er Friedrich II (von Hohenstaufen) vorgestellt, nach 1228 ist fast nichts über ihn bekannt. In einem Dokument von 1240 wird ihm von der Republik Pisa in Anerkennung seiner Verdienste ein jährlicher Geldbetrag verliehen.

Weniger durch seine algebraischen und geometrischen Untersuchungen als vielmehr durch die nach ihm benannten Zahlen ist Fibonacci uns bekannt geworden. Es wird untersucht wie viele Nachkommen ein Kaninchenpaar bekommt. Es wird von den folgenden Annahmen ausgegangen.

- Jedes Kaninchenpaar wird im Alter von 2 Monaten gebärfähig.
- Jedes gebärfähige Paar bringt von da an jeden Monat ein neues Paar zur Welt.
- Kaninchen leben unendlich lange.

Im ersten Monat lebt ein Paar. Dieses wird im zweiten Monat gebärfähig und gebiert im dritten Monat ein neues Paar. Auch im vierten Monat bringt das erste Paar ein neues Paar zur Welt, während im fünften Monat beide Paar ein neues Paar zur Welt bringen. In der folgenden Tabelle bedeutet N ein neues Paar und G ein gebärfähiges Paar:

Monat	1	2	3	4	5	6	7
N, G	$1N$	$1G$	$1G+1N$	$2G+1N$	$3G+2N$	$5G+3N$	$8G+5N$
Σ	1	1	2	3	5	8	13

Bezeichnet f_k die Anzahl der Kaninchenpaare im k-ten Monat, so ist also

$$f_1 = f_2 = 1, \qquad f_{k+1} = f_k + f_{k-1} \quad (k = 2, 3, \ldots).$$

Die Folge $\{f_k\}$ nennt man die Fibonacci-Folge bzw. die Folge der Fibonacci-Zahlen[11]. Bei A. Beutelspacher, B. Petri (1996, S. 89) kommt die folgende hübsche Aufgabe vor:

- Ein Briefträger steigt täglich eine lange Treppe nach folgendem Muster empor: Die erste Stufe betritt er in jedem Fall. Von da an nimmt er jeweils nur eine Stufe oder aber zwei Stufen auf einmal.

  Auf wieviel verschiedene Arten kann der Briefträger die k-te Stufe erreichen?

Man rät richtig: Auf f_k Arten kann die k-te Stufe erreicht werden. Dies kann sehr leicht durch vollständige Induktion nach k bewiesen werden. In *Mathematica* gibt es

[11]Man kann natürlich auch $f_0 := 0$, $f_1 := 1$ und $f_k := f_{k-1} + f_{k-2}$ setzen.

die Funktion `Fibonacci`. Nach `Fibonacci[50]` erhält man 12586269025 als f_{50}. Bei Maple hat man durch `with(combinat):` ein package zu laden und erhält dann nach `fibonacci(50);` dasselbe Ergebnis.

Von den vielen Zusammenhängen zwischen der Goldenen-Schnitt-Zahl ϕ und der Fibonacci-Folge seien hier nur die folgenden genannt.

- Es ist
$$\phi = \lim_{k\to\infty} \frac{f_{k+1}}{f_k}.$$

Dies wird in Unterabschnitt 5.4 nachgewiesen. Ferner:

- Es gilt die Formel von Binet:
$$f_k = \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^k - (-\phi)^{-k}), \qquad k = 0, 1, \dots.$$

- Es ist
$$\phi^k = f_k\phi + f_{k-1}, \qquad k = 1, 2, \dots.$$

Diese beiden Beziehungen beweist man leicht durch vollständige Induktion.

Weiter wollen wir zunächst auf Fibonacci-Zahlen nicht eingehen. Die Literatur hierzu ist außerordentlich reichhaltig. Z. B. kann man sich 15 200 000 Webseiten ansehen, in denen das Wort "Fibonacci" vorkommt. Hingewiesen sei insbesondere auf

`http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fib.html`

Dort findet man viele weitere Links, z. B. solche mit so viel versprechenden Titeln wie

- Fibonacci Numbers and Nature.
- The Golden Section in Nature.

2.1 Aufgaben

1. Sei $\{f_k\}$ die Folge der Fibonacci-Zahlen, also $f_0 := 0$, $f_1 := 1$ und $f_k := f_{k-1} + f_{k-2}$, $k = 2, 3, \dots$. Dann ist
$$f_{k+1}f_{k-1} - f_k^2 = (-1)^k, \qquad k = 1, 2, \dots.$$

2. Sei $\{f_k\}$ die Folge der Fibonacci-Zahlen, also $f_0 := 0$, $f_1 := 1$ und $f_k := f_{k-1} + f_{k-2}$, $k = 2, 3, \dots$. Dann ist
$$\phi = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{f_k f_{k+1}}.$$

3. Sei $\{f_k\}$ die Folge der Fibonacci-Zahlen, also $f_0 := 0$, $f_1 := 1$ und $f_k := f_{k-1} + f_{k-2}$, $k = 2, 3, \dots$. Man zeige:

   (a) Für $k = 0, 1, \dots$ und $l \in \mathbb{N}$ ist $f_{k+l} = f_l f_{k+1} + f_{l-1} f_k$.

   (b) Es ist $f_{2k+1} = f_{k+1}^2 + f_k^2$, $k = 0, 1, \dots$.

(c) Es ist

$$\sum_{j=0}^{k} f_j = f_{k+2} - 1, \qquad k = 0, 1, \ldots.$$

(d) Es ist

$$\sum_{j=0}^{k} f_j^2 f_{j+1} = \frac{f_k f_{k+1} f_{k+2}}{2}, \qquad k = 0, 1, \ldots.$$

(e) Es ist

$$\sum_{j=0}^{k} f_j f_{k-j} = \frac{1}{5}(k-1) f_k + \frac{2}{5} k f_{k-1}, \qquad k = 1, \ldots.$$

(f) Es ist $(1-\phi)^k = f_{k+1} - \phi f_k$, $k = 0, 1, \ldots$.

4. Sei

$$A_k := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{k \times k}.$$

Man berechne $\det(A_k)$.

5. Sei $\{f_k\}$ die Folge der Fibonacci-Zahlen, also $f_0 := 0$, $f_1 := 1$ und $f_k := f_{k-1} + f_{k-2}$, $k = 2, 3, \ldots$. Dann ist

$$\sum_{j=0}^{k} f_j x^j = \begin{cases} \dfrac{f_{k+1} x^{k+1} + f_k x^{k+2} - x}{x^2 + x - 1}, & x^2 + x - 1 \neq 0, \\ \dfrac{(k+1) f_{k+1} x^k + (k+2) f_k x^{k+1} - 1}{2x + 1}, & x^2 + x - 1 = 0, \end{cases} \qquad k = 0, 1, \ldots.$$

6. Sei $\{f_k\}$ die Folge der Fibonacci-Zahlen, also $f_0 := 0$, $f_1 := 1$ und $f_k := f_{k-1} + f_{k-2}$, $k = 2, 3, \ldots$. Ferner sei die Folge $\{g_k\}$ definiert durch $g_0 := 2$, $g_1 := 1$ und $g_k := g_{k-1} + g_{k-2}$, $k = 2, 3, \ldots$. Man zeige:

(a) Es ist $g_k = f_{k-1} + f_{k+1}$, $k = 1, 2, \ldots$.

(b) Es ist $f_{2k} = f_k g_k$, $k = 0, 1, \ldots$.

7. Allgemeiner als in Aufgabe 6 bezeichnet man eine Folge $\{a_k\}_{k=0,1,\ldots}$ als eine *Lucas-Folge*, wenn $a_k = a_{k-1} + a_{k-2}$, $k = 2, 3, \ldots$. Man zeige, dass

$$a_k = a_1 f_k + a_0 f_{k-1}, \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

wobei $\{f_k\}$ natürlich die Folge der Fibonacci-Zahlen ist.

8. Sei $\{a_k\}_{k=0,1,\ldots}$ eine Lucas-Folge, siehe Aufgabe 7, und $a_0 + a_1\phi \neq 0$. Dann ist

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \phi.$$

3 Fra Luca Pacioli: Divina Proportione

In diesem Abschnitt wollen wir uns nach Euklid (auf den wir auch hier immer wieder zurückkomen) mit einem zweiten Autor über den goldenen Schnitt beschäftigen, nämlich (Fra) Luca Pacioli (*1445, †1517)[12]. Pacioli ist Autor des Buches *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportinalita* (Venedig, 1494)[13] und des für uns wichtigen Buches *Divina proportione* (Venedig, 1509) mit Illustationen von Leonardo da Vinci[14]. Beide Bücher sind wohl nicht besonders originell, sie waren aber trotzdem einflussreich, weil sie das zu der Zeit bekannte Wissen zusammenfassten.

Der Beginn der Divina Proportione ist wie folgt (A. Beutelspacher, B. Petri hat dieser Beginn offenbar so gut gefallen, dass sie ebenfalls mit diesem Zitat ihr Buch über den goldenen Schnitt beginnen), wobei wir den Text der Übersetzung von C. Winterberg angeben:

- Ein für alle klaren und wissbegierigen Geister nothwendiges Werk; wo jeder Studirende der Philosophie, Perspective, Malerei, Sculptur, Architektur, Musik und anderer mathematischer Fächer eine angenehme subtile und bewundernswerte Gelehrsamkeit antreffen und sich mit verschiedensten Fragen der heiligsten Wissenschaft erfreuen wird.

Das Buch ist Fürst Ludovico Sforza, Herzog von Mailand, gewidmet. Aus Cap. II zitieren wir lediglich:

[12] Biographische Einzelheiten zu Pacioli findet man unter

`http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Pacioli.html`

Ein wunderschönes Bild (Ritratto di Fra Luca Pacioli, 1495) von Jacopo de Barbari zeigt den Franziskanermönch Luca Pacioli mit einer Schiefertafel, auf der man geometrische Konstruktionen, wahrscheinlich zum goldenen Schnitt, sehen kann, sowie einem Polyeder. Man kann sich dieses Bild auch unter der Adresse

`http://www.georgehart.com/virtual-polyhedra/pacioli.html`

ansehen (oder man fährt nach Neapel, es war allerdings kürzlich auch in einer kleinen Ausstellung in Kassel zu sehen). Hier noch die Lebensdaten berühmter Renaissance-Maler: Piero della Francesca (1410–1492), Leonardo da Vinci (1452–1519 (beide kannte Pacioli sehr gut), Albrecht Dürer (1471–1528), Lucas Cranach der Ältere (1472–1553).

[13] Hier kommen unter anderem die folgenden beiden Aufgaben vor:

Zwei Mannschaften spielen ein Ballspiel. Sieger ist, wer zuerst 60 Punkte erreicht. Es wird um einen Preis von 22 Dukaten gespielt. Als das Spiel abgebrochen werden musste, hatte eine Mannschaft 50 Punkte, die andere 30 Punkte. Wie soll das Preisgeld aufgeteilt werden?

Ein Mann lag auf dem Sterbebett und wollte sein Testament machen. Sein Vermögen belief sich auf 1000 Dukaten. 200 Dukaten vermachte er der Kirche, und 800 Dukaten blieben übrig. Seine Frau stand kurz vor der Niederkunft, und er wollte sowohl seine Witwe als auch den Halbwaisen eigens bedenken. Darum traf er die folgende Anordnung: Würde das Kind ein Mädchen, so sollte es das Geld mit der Mutter teilen, jede 400 Dukaten; würde das Kind jedoch ein Junge, so sollte dieser 500 und die Witwe nur 300 erhalten. Kurz danach starb der Mann, und bald setzten auch die Wehen ein. Die Frau gebar aber Zwillinge, und um alles noch komplizierter zu machen, war eines davon ein Junge, das andere ein Mädchen. Das Problem lautet: Wenn die Verhältnisse zwischen Mutter, Sohn und Tochter so beachtet werden, wie sie der Verschiedene gewünscht hatte, wie viele Dukaten werden dann jeweils auf Mutter, Sohn und Tochter entfallen?

[14] Ein Originalexemplar ist übrigens in der Niedersächsischen Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen vorhanden. Man kann es sich ansehen, eine Ausleihe ist nicht möglich!

- . . . Und es ist deswegen nicht zu verwundern, wenn es zu unsern Zeiten wenig gute Mathematiker gibt, weil die Seltenheit guter Lehrer schuld daran ist, zugleich mit dem Schlunde Schlaf, und müssigen Federn, und zum Theil der modernen Geister.

In Cap. V (Vom passenden Titel des vorliegenden Tractats) begründet Pacioli den Titel Divina Proportione damit, dass der goldene Schnitt Eigenschaften habe, die sonst nur Gott zukommen. Er gibt vier Eigenschaften an:

- Die erste ist, dass sie nur allein da sei und nicht mehr; und es ist nicht möglich, andere Species noch Abweichungen von ihr anzugeben, welche Einheit der theologischen wie auch philosophischen Lehre gemäß das höchste Beiwort Gottes selber ist. Die zweite Eigenschaft ist die der heil. Dreieinigkeit, d. h. wie in den Göttlichen ein und dieselbe Substanz zwischen drei Personen, Vater, Sohn und heil. Geist besteht, ebenso muss ein und dieselbe Proportion dieser Art stets zwischen drei Ausdrücken stattfinden, und kann sich nie weder bei mehr noch weniger (Ausdrücken) wiederfinden, was besprochen werden wird. Die dritte Eigenschaft ist, dass, wie Gott eigentlich nicht definirt noch durch Worte uns verständlich gemacht werden kann, ebensowenig diese unsere Proportion durch eine verständliche Zahl je bestimmt noch durch irgend eine rationale Grösse sich ausdrücken lässt, sondern stets verborgen und geheim bleibt, und daher von den Mathematikern irrational genannt wird. Die vierte Eigenschaft ist, dass ebenso wie Gott sich niemals ändern kann, und Alles in Allem, und Alles in jedem seiner Theile ist, so unsere vorliegende Proportion stets in jeder continuirlichen und discreten Grösse; mögen dieselben gross oder klein sein, ein und dieselbe und stets unveränderlich bleibt, und auf keine Art sich verändern, noch auch mit dem Verstande auf andere Art aufgefasst werden kann, wie unserer Fortgang zeigen wird. . . .

In Cap. VI (von seiner würdigen Empfehlung) wird von der göttlichen Proportion gesagt:

- Diese unsere Proportion, erhabener Herzog, ist solchen Vorzugs und Auszeichnung wert, wie man es in Anbetracht ihrer unendlichen Macht nur irgend sagen kann, sofern als ohne ihre Kenntnis sehr viele der Bewunderung höchst würdige Dinge weder in der Philosophie noch in irgend einer anderen Wissenschaft jemals ans Licht gelangen könnten, . . .

Bei Pacioli folgen dann dreizehn "Sätze" (dort "Wirkungen" genannt). Diese werden nicht bewiesen (es werden gelegentlich Zahlenbeispiele angegeben), sondern es wird auf Euklid verwiesen. Wir wollen diese dreizehn "Wirkungen" durchgehen.

- Von der ersten Wirkung einer nach unserer Proportion getheilten Linie (Cap. VII).

  Wenn eine Linie nach der Proportion getheilt ist, die einen mittleren und zwei äussere Abschnitte hat (...), und hat man von ihrem größeren Abschnitt die Hälfte der ganzen Linie hinzugefügt, welche so proportional getheilt wurde, so wird mit Nothwendigkeit folgen, dass das Quadrat ihrer Summe stets das fünffache, d. h. fünfmal so viel als das Quadrat der genannten vollen Hälfte beträgt.

Die entsprechende Aussage bei Euklid (XIII, 1) lautet:

- Teilt man eine Strecke stetig, so wird ihr größerer Abschnitt, wenn man die Hälfte der ganzen Strecke hinzufügt, quadriert fünfmal so groß wie das Quadrat über die Hälfte.

Für einen arithmetischen Beweis (L=Länge der gesamten Strecke, $l = L/\phi$=Länge der größeren Strecke) ist

$$\Big(\frac{L}{2}+\frac{L}{\phi}\Big)^2 = 5\Big(\frac{L}{2}\Big)^2$$

nachzuweisen, was einfach ist. Ein geometrischer Beweis folgt aus der Konstruktion des goldenen Schnitts (II, 11), wie wir sie in Abbildung 2 durchgeführt haben. Nach Konstruktion ist nämlich $|AE| = \frac{1}{2}|AB|$, der Satz von Pythagoras, angewandt auf $\triangle EAB$, ergibt $|EB|^2 = \frac{5}{4}|AB|^2$. Wegen

$$|EB| = |EF| = |EA| + |AF| = \frac{|AB|}{2} + |AP|$$

ist daher

$$\Big(\frac{|AB|}{2} + |AP|\Big)^2 = 5\Big(\frac{|AB|}{2}\Big)^2,$$

das ist gerade die Behauptung.

- Von ihrer zweiten wesentlichen Wirkung (Cap. XI).

  Wenn eine Grösse in zwei Theile getheilt und zu der einen eine Grösse hinzugefügt wird, so dass das Quadrat dieser Summe das Fünffache des Quadrats der hinzugefügten Größe ist, so folgt mit Nothwendigkeit, dass die genannte zugefügte Größe die Hälfte der in die beiden Theile zerlegten ersten Grösse sei, und dass die, zu welcher sie hinzugefügt, ihr größerer Abschnitt, und dass sie die ganze in ihnen nach unserer Proportion getheilt sei.

Bei Euklid (XIII, 2) findet man eine etwas andere Formulierung:

- Wird quadriert eine Strecke fünfmal so groß wie das Quadrat eines Abschnittes von ihr, dann ist, wenn man das doppelte des genannten Abschnitts stetig teilt, der größere Abschnitt der Rest der ursprünglichen Strecke.

Ein analytischer Beweis der Aussage bei Euklid ist einfach. Ist nämlich $1 = \sqrt{5}\alpha$, so ist $2\alpha/\phi = 1 - \alpha$. Die Aussage bei Pacioli ist ebenfalls klar, wenn zu Beginn unter einer Teilung einer Größe eine stetige Teilung verstanden wird. Denn aus $\alpha + 1/\phi = \sqrt{5}\alpha$ folgt $\alpha = \frac{1}{2}$.

- Über ihre dritte besondere Wirkung (Cap. XII).

  Wenn eine Größe nach unserer Proportion getheilt ist, und wenn man dem kleineren Abschnitt die Hälfte des größeren hinzufügt, so wird alsdann stets das Quadrat der Summe das Fünffache des Quadrats der Hälfte des genannten größeren Abschnitts sein.

Fast wörtlich ist dies die Aussage bei Euklid (XIII, 3). Ein arithmetischer Beweis beruht auf

$$\Big(\Big(1-\frac{1}{\phi}\Big)+\frac{1}{2\phi}\Big)^2 = 5\Big(\frac{1}{2\phi}\Big)^2,$$

was natürlich leicht zu zeigen ist. Wir wollen uns Euklids Beweis näher ansehen, siehe Abbildung 10. Die Strecke AB sei im Punkt C nach dem goldenen Schnitt geteilt, AC sei die größere der beiden Strecken. Die Strecke AC sei in D halbiert. Behauptet wird

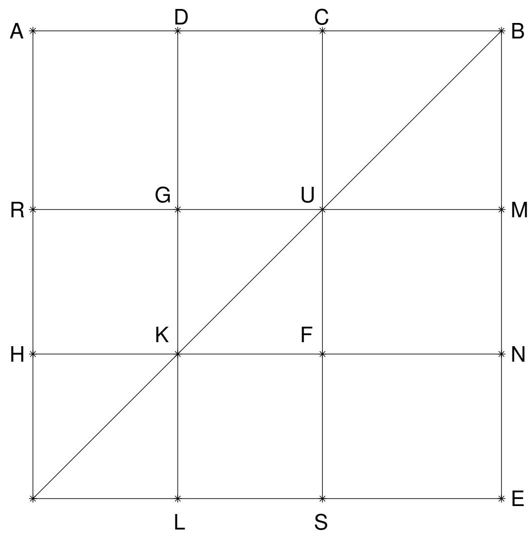

Abbildung 10: Beweis von Proposition 3 in Buch XIII

dann, dass $|DB|^2 = 5|DC|^2$. Wir bilden das Quadrat AE mit der Seitenlänge $|AB|$ (wir geben für Rechtecke und speziell Quadrate nur gegenüber liegende Ecken an). Auch die Seitenlängen dieses Quadrats seien entsprechend geteilt. Zu zeigen ist, dass der Flächeninhalt des Quadrats DN fünfmal so groß wie der des Quadrats GF ist. Sozusagen nach Definition des goldenen Schnitts (siehe Abbildung 2) ist $|AC|^2 = |AB|\,|CB|$. Wegen $|AC| = 2\,|DC|$ ist daher $|AB|\,|CB| = 4\,|DC|^2$. D. h. der Flächeninhalt des Rechtecks CE ist viermal so groß wie der des Quadrats GF. Der Flächeninhalt des Rechtecks DU ist aber offensichtlich gleich dem des Rechtecks FE. Hieraus folgt dann sofort die Behauptung.

- Von ihrer vierten unsagbaren Wirkung (Cap. XIII).

  Wenn eine Grösse nach unserer göttlichen Proportion getheilt wird und man zu der ganzen Größe ihren größeren Abschnitt hinzufügt, so werden genannte Summe und genannter größerer Abschnitt Theile einer anderen ebenso getheilten Grösse sein. Und der größere Abschnitt dieser zweiten so getheilten Grösse wird immer die ganze zuerst genannte Grösse sein.

Bei Euklid (XIII, 5) heißt die entsprechende Stelle:

- Teilt man eine Strecke stetig und setzt ihr eine dem größeren Abschnitt gleiche an, dann ist die Summenstrecke stetig geteilt, und größerer Abschnitt ist die Ausgangsstrecke.

Ein analytischer Beweis basiert einfach auf der Gleichung

$$\frac{1}{\phi}\Big(1 + \frac{1}{\phi}\Big) = 1.$$

Euklids Beweis wird in Abbildung 11 veranschaulicht. Die Strecke AB seim Punkt C

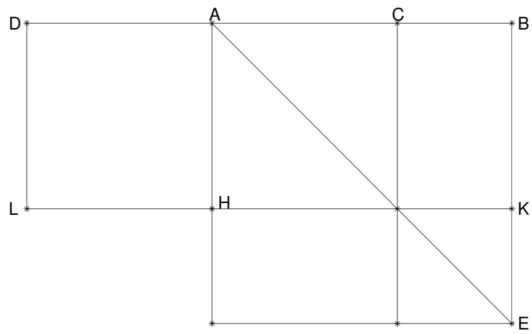

Abbildung 11: Beweis von Proposition 5 in Buch XIII

stetig geteilt, AC sei der größere Abschnitt und $|DA| = |AC|$. Zu zeigen ist, dass die Strecke DB in A stetig geteilt wird und die Ausgangsstrecke AB der größere Abschnitt ist. Wie in Abbildung 11 angegeben, konstruiere man das Quadrat AE und das Rechteck DK. Man hat zu zeigen, dass ihre Flächeninhalte gleich sind. Da die Strecke AB in C nach dem goldenen Schnitt geteilt wird, ist der Flächeninhalt des Quadrates DH gleich dem des Rechtecks HE, woraus die Behaupung unmittelbar folgt.

- Von ihrer fünften wunderbaren Wirkung (Cap. XIV).

  Wenn eine Größe nach unserer genannten Proportion getheilt ist, so ist stets die Summe des Quadrats des kleineren Abschnittes und des Quadrats der ganzen Größe das dreifache des Quadrats des grösseren Abschnittes.

Genau diese Aussage findet man bei Euklid (XIII, 4). Die Aussage ist richtig, da

$$\Big(1 - \frac{1}{\phi}\Big)^2 + 1^2 = 3\Big(\frac{1}{\phi}\Big)^2.$$

Bei Euklid basiert der Beweis auf Abbildung 12. Die Strecke AB sei in C nach dem goldenen Schnitt geteilt, AC sei die größere Strecke. Man bilde das Quadrat AE mit der Seitenlänge $|AB|$. Zu zeigen ist, dass der Flächeinhalt des Quadrats AE plus dem des Quadrats CK dreimal so viel wie der Flächeninhalt des Quadrats HG ist. Da C die Strecke AB nach dem goldenen Schnitt teilt, ist der Flächeninhalt des Rechtecks AK gleich dem des Quadrates HG. Der Rest des Beweises ist einfach und bleibt dem Leser überlassen.

- Von ihrer sechsten unnennbaren Wirkung (Cap. XV).

  Keine rationale Größe kann je nach unserer genannten Proportion so getheilt werden, ohne dass jeder ihrer Abschnitte irrational . . . sei.

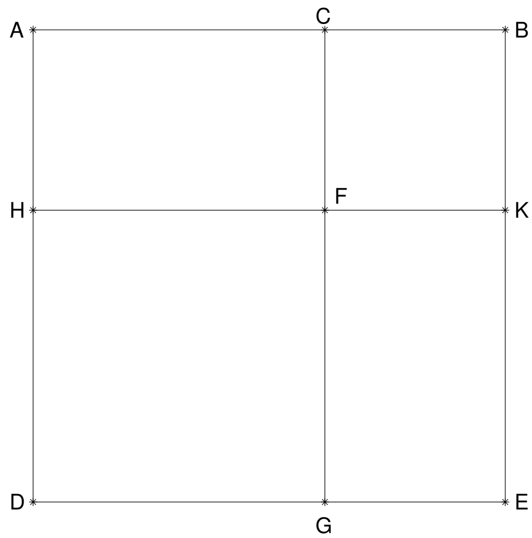

Abbildung 12: Beweis von Proposition 4 in Buch XIII

Siehe Euklid (XIII, 6). Gemeint ist ja wohl: Ist L rational, so sind L/ϕ und $L(1-1/\phi)$ irrational.

- Von ihrer siebenten unglaublichen Wirkung (Cap. XVI).

  Wenn man die Seite des gleichseitigen Sechsecks zu der Seite des gleichseitigen Zehnecks addirt, welche beide als in ein und demselben Kreis beschrieben sich verstehen, so wird ihre Summe immer eine nach unserer genannten Proportion getheilte Grösse sein. Und ihr grösserer Abschnitt wird die Sechseckseite sein.

Das ist genau die Aussage bei Euklid (XIII, 9). Ein analytischer Beweis der Aussage ist einfach. Sei nämlich s_n die Seitenlänge eines dem Einheitskreis eingeschriebenen regelmäßigen n-Ecks. Eine leichte Überlegung zeigt, dass $s_n = 2\sin(\pi/n)$. Zu zeigen ist also, dass $s_6 + s_{10} = \phi s_6$ bzw. $(\sin(\pi/6) + \sin(\pi/10))/\sin(\pi/6) = \phi$, was aber wegen $\sin(\pi/6) = 1/2$ und $\sin(\pi/10) = (\sqrt{5}-1)/4$ richtig ist.

Jetzt wollen wir einen kleinen Exkurs über die Konstruktion des regelmäßigen Fünfecks, des Sechsecks und des Zehnecks mit Zirkel und Lineal machen. Die Konstruktion dafür, einem gegebenen Kreis ein gleichseitiges und gleichwinkliges Fünfeck einzubeschreiben, wird bei Euklid (IV, 11) angegeben. Durch Winkelhalbierung bekommt man das reguläre Zehneck, die Konstruktion des regulären Sechsecks ist bekanntlich trivial.

Wir geben zunächst die folgende Konstruktion (siehe auch Abbildung 13) an, danach gehen wir auf die von Euklid ein.

- Gegeben ist ein Kreis um O.

- Konstruiere zueinander senkrechte Durchmesser des Kreises und damit die Punkte A und C auf dem Kreis.

- Bestimme den Mittelpunkt B von OA.

- Schlage um B einen Kreis mit dem Radius $|BC|$ und bestimme den Schnittpunkt D dieses Kreises mit dem Durchmesser des gegebenen Kreises, auf dem die Strecke AB liegt.
- $|CD|$ ist Seitenlänge des regulären Fünfecks, $|OD|$ ist Seitenlänge des regulären Zehnecks.

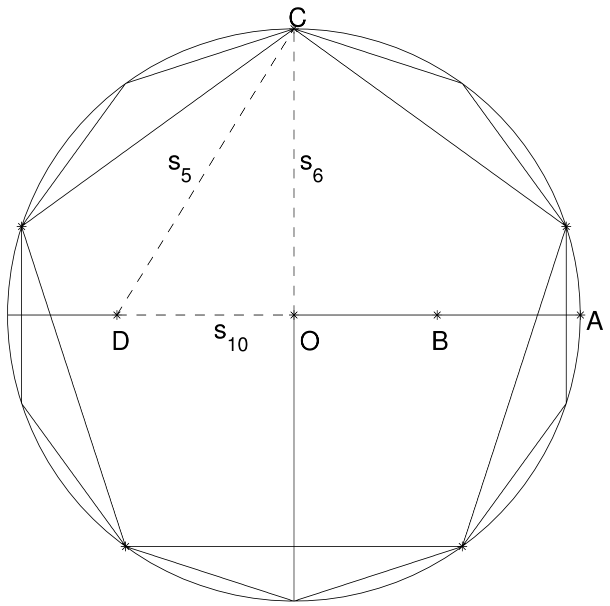

Abbildung 13: Konstruktion des regulären Fünfecks

Wegen des Satzes von Pythagors ist $s_6^2 + s_{10}^2 = s_5^2$, was genau die Aussage bei Euklid (XIII, 10) ist. Ein analytischer Beweis für die Korrektheit der obigen Konstruktion ist einfach, da ja z. B. $|BD| = |BC| = (\sqrt{5}/2)|OA|$ und daher $|OD| = |BD| - \frac{1}{2}|OA| = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)|OA| = 2\sin(\pi/10)|)|OA|$ die Seitenlänge des regulären Zehnecks ist. Wegen des Satzes von Pythagoras ist

$$|CD| = \sqrt{|OD|^2 + |OC|^2} = \sqrt{\frac{1}{2}(5-\sqrt{5})}|OA| = 2\sin(\pi/5)|OA|,$$

also $|CD|$ die Seitenlänge des regulären Fünfecks.

Nun wollen wir die Konstruktion bei Euklid angeben. Hierbei geht man aus von einem sogenannten *goldenen Dreieck*, d. h. eines gleichschenkligen Dreiecks, bei dem sich die Länge eines Schenkels zur Länge der Grundseite wie ϕ zu 1 verhält (wir kommen hierauf zurück). Die Konstruktion eines goldenen Dreiecks ist einfach. Gegeben sei die Strecke CD, die Grundseite des goldenen Dreiecks. Man konstruiere eine Strecke der Länge $\phi|CD|$ und anschließend das zugehörige goldene Dreieck $\triangle ACD$. Man bestimme den Umkreis zu diesem Dreieck. Dies ist einfach möglich, da der Mittelpunkt dieses Umkreises Schnittpunkt der Mittellote auf AC bzw. AD (und CD) ist[15]. Die Winkel-

[15] Der Umkreisradius eines goldenen Dreiecks mit der Grundseite CD ist übrigens

$$R = \frac{|CD|}{2\sin(\pi/5)}.$$

halbierende von $\sphericalangle ACD$ schneidet den Umkreis in einem Punkt E, die von $\sphericalangle ADC$ den Kreis in einem Punkt B. (Man könnte E und B aber auch als Schnitt des Umkreises mit einem Kreis um D mit dem Radius $|CD|$ bzw. um C mit dem Radius $|CD|$.) Dann ist das Fünfeck $ABCDE$ ein reguläres Fünfeck, siehe Abbildung 14. Bei der Aufga-

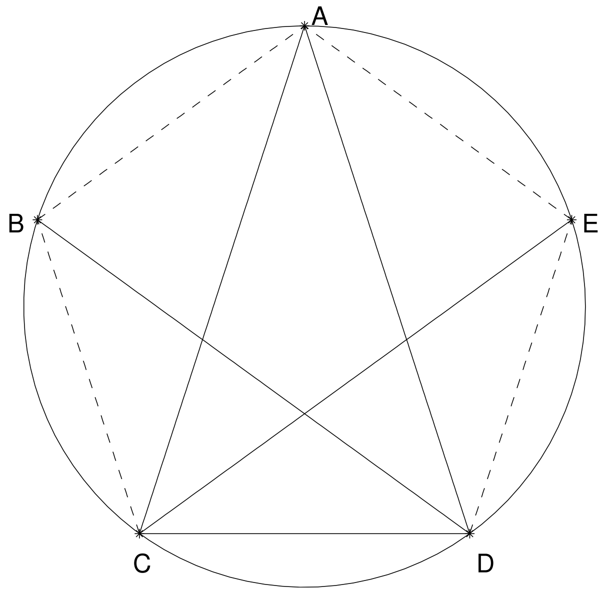

Abbildung 14: Konstruktion des regulären Fünfecks nach Euklid

be IV, 11 bei Euklid geht es nun aber eigentlich darum, einem *gegebenen* Kreis ein reguläres Fünfeck einzubeschreiben. Bei Euklid wird daher zunächst ein beliebiges goldenes Dreieck konstruiert, danach im gegebenen Kreis ein (goldenes) Dreieck, welches winkelgleich ist. Wie dies geschehen kann, wird bei Euklid (IV, 2) beschrieben.

Mit der Konstruktion des regulären Fünfecks ist natürlich auch die Konstruktion des Pentagramms angegeben, siehe Abbildung 15. Das Pentagramm bzw. der Drudenfuß

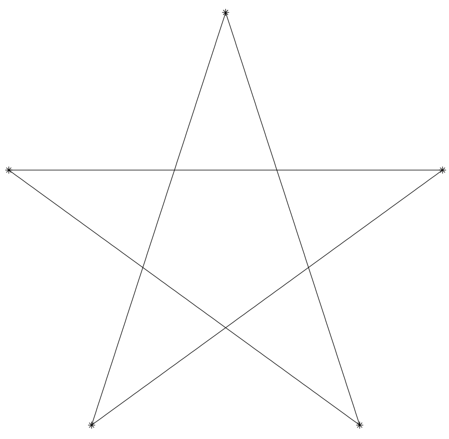

Abbildung 15: Das Pentagramm

gilt in der Magie als ein Dämonen bannendes Symbol. In geheimen Orden, besonders solchen, die Schwarze Magie betreiben, wird es als Erkennungszeichen gebraucht.

- Von der umgekehrten Wirkung der vorhergehenden (Cap. XVII).

  Wenn eine Linie nach der Proportion getheilt ist, die einen mittleren und zwei äußere Abschnitte hat, so ist immer in dem Kreise wofür der größere Abschnitt die Seite des ihm einbeschriebenen Sechsecks ist, der kleinere die entsprechende Zehneckseite.

Es ist mir unklar, weshalb diese "Wirkung" von Pacioli aufgenommen wurde (allerdings fehlt auch ein steigerndes Adjektiv!), denn wegen der siebenten Wirkung ist diese Aussage trivial.

- Von ihrer neunten über die anderen hinausgehenden Wirkung (Cap. XVIII).

  Wenn man im Kreise das gleichseitige Fünfeck bildet, und über seine zwei benachbarten Ecken zwei gerade Linien von den Endpunkten seiner Seiten ausgehend spannt, so werden sich diese untereinander nothwendigerweise nach unserer Proportion theilen.

Bei Euklid (XIII, 8) heißt es etwas genauer:

- Diagonalen, die im gleichseitigen und gleichwinkligen Fünfeck zwei aufeinanderfolgenden Winkeln gegenüberliegen, teilen einander stetig; und ihre größeren Abschnitte sind der Fünfeckseite gleich.

Ein analytischer Beweis ist nicht schwierig, wir verzichten aber darauf. Etwas verkürzt sieht der Beweis bei Euklid folgendermaßen aus, man vergleiche Abbildung 16 (wir benutzen im wesentlichen dieselben Bezeichnungen wie Euklid). Wir wollen zeigen, dass die Diagonalen AC und EB in H nach dem goldenen Schnitt getrennt werden.

1. Es ist $|EA| = |AB|$ und $\triangle ABE = \triangle ABC$, denn zwei Seiten und ein eingeschlossener Winkel sind gleich.

2. Es ist $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ABE$ und $\sphericalangle AHE = 2\sphericalangle BAH$.

3. Es ist $\sphericalangle EAC = 2\sphericalangle BAC$.

4. Es ist $\sphericalangle HAE = \sphericalangle AHE$ und daher $|HE| = |EA| = |AB|$.

5. Es ist $\sphericalangle ABE = \sphericalangle AEB = \sphericalangle BAH$.

6. Die Dreiecke $\triangle ABE$ und $\triangle HAB$ sind gleichschenklig und winkelgleich. Daher ist bei beiden Dreiecken das Verhältnis der Länge der Grundseite zur Länge des Schenkels dasselbe. D. h. es ist

$$\frac{|EB|}{|AB|} = \frac{|AB|}{|BH|}.$$

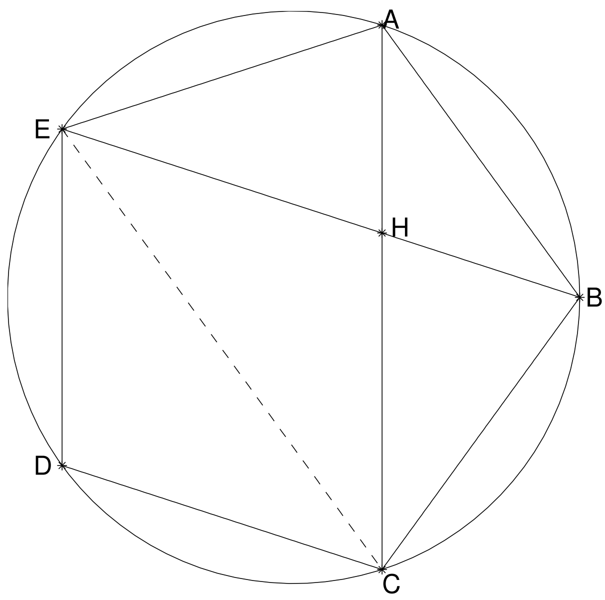

Abbildung 16: Proposition 8 in XIII bei Euklid

Nun ist aber $|AB| = |EH|$, folglich

$$\frac{|EB|}{|EH|} = \frac{|EH|}{|BH|}.$$

Da $|EB| > |EH|$ ist $|EH| > |BH|$. Also ist schließlich bewiesen, dass die Stecke EB in H nach dem goldenen Schnitt getrennt wird.

- Über ihre 10. höchste Wirkung (Cap. XIX).

  Wenn eine Grösse nach der genannten Proportion getheilt ist, so gehen alle Wirkungen, welche aus ihr und ihren Abschnitten entspringen können, ihrer Beschaffenheit , Anzahl, Species und Gattung nach selbst aus irgend einer anderen ebenso getheilten Göße hervor.

Hier kann man wohl nur spekulieren, was gemeint sein könnte.

- Von ihrer 11. ausgezeichnetsten Wirkung (Cap. XX).

  Wenn man die Seite eines gleichseitigen Sechsecks nach unserer göttlichen Proportion theilen wird, so wird ihr größerer Abschnitt stets nothwendig die Seite des von demselben Kreise wie das Sechseck umschriebenen Zehnecks sein.

Bei Pacioli wird auf Buch XIV, 3 verwiesen (was eigentlich nicht zu den ursprünglichen Elementen gehört). Wegen der siebten Wirkung bzw. XII, 9 ist die Aussage aber eigentlich klar. Denn danach ist $(s_6 + s_{10})/s_6 = \phi$ (hierbei bedeutet s_n die Seitenlänge eines dem Einheitskreis eingeschriebenen regelmäßigen n-Ecks. Also ist $s_{10}/s_6 = \phi - 1 = 1/\phi$, womit die Behauptung bewiesen ist.

- Von ihrer zwölften fast unbegreiflichen Wirkung (Cap. XXI).

  Wenn eine Grösse nach unserer genannten Proportion getheilt wird, so verhält sich die Wurzel aus der Summe aus dem Quadrat der ganzen Grösse und dem Quadrat ihres grössern Abschnitts zur Wurzel der Summe aus dem Quadrat genannter Grösse und dem Quadrate ihres kleinern Abschnitts wie die Seite des Kubus zur Seite des Dreiecks des zwanzigflächigen Körpers.

Der "zwanzigflächige Körper" ist natürlich das Ikosaeder (20 Flächen (Dreiecke), 12 Ecken und 30 Kanten), siehe Abbildung 17. Der Durchmesser der Umkugel eines

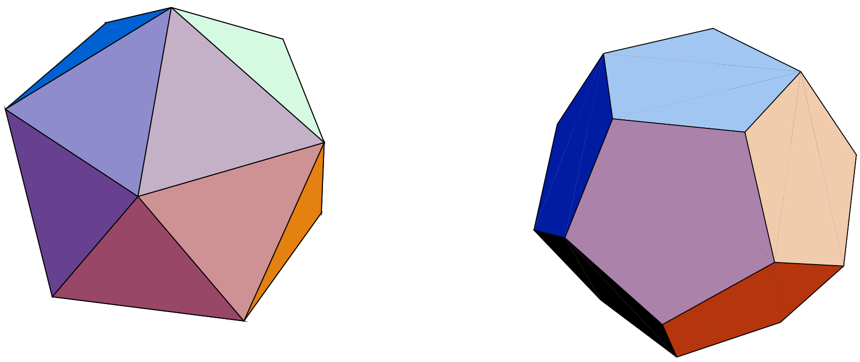

Abbildung 17: Das Ikosaeder und das Dodekaeder

Würfels mit Kantenlänge l_6 ist $2r = l_6\sqrt{3}$ (das ist genau der Inhalt von Euklid XIII, 15). Die Kante eines Ikosaeders in einer Kugel vom Radius r ist

$$l_{20} = r\sqrt{2 - 2/\sqrt{5}} = \frac{r}{\sqrt{5}}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$$

(siehe Euklid XIII, 16). Dann ist einerseits

$$\frac{\sqrt{1^2 + (1/\phi)^2}}{\sqrt{1^2 + (1 - 1/\phi)^2}} = \frac{\sqrt{\phi^2 + 1}}{\sqrt{\phi^2 + (\phi - 1)^2}} = \frac{\sqrt{\phi + 2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{6}}$$

und andererseits

$$\frac{l_6}{l_{20}} = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{6}}.$$

Damit ist die Aussage bewiesen.

- Von ihrer dreizehnten werthesten Wirkung (Cap. XXII).

Diese “Wirkung” wollen wir nicht angeben. Sie ist ziemlich unklar formuliert und betrifft die Konstruktion des “edelsten von allen regelmäßigen Körpern, Dodekaeder genannt”. Die vier anderen platonischen Körper (Tetraeder, Hexaeder bzw. Würfel oder Kubus, Oktaeder und Ikosaeder) sind den vier Elementen (Erde, Feuer, Luft, Wasser) zugeordnet, während das Dodekaeder von Plato als Gestalt angesehen wurde, die das ganze Weltall umfasst.

Schließlich folgt Cap. XXIII (Wie aus Ehrfurcht vor unserem Heile die genannte Wirkungen endigen).

- Es scheint mir, erhabener Herzog, nicht angemessen, mich über noch mehr von ihren unendlichen Wirkungen für jetzt zu verbreiten, weil das Papier der Tinte nicht genügen würde, sie alle auszudrücken, sondern wir haben nur diese dreizehn unter den andern ausgewählt, aus Verehrung für die Schaar der Zwölf und ihres heiligsten Hauptes, unseres Erlösers Jesus Christus. Denn da wir ihr den göttlichen Namen auch der Zahl nach von 13 Artikeln mit Bezug auf unser Heil und zwar der zwölf Apostel mit unserm Erlöser beigelegt haben, so seien sie hiermit beendigt; ...

3.1 Aufgaben

1. Man gebe einen analytischen Beweis für die Aussage: Diagonalen, die im gleichseitigen und gleichwinkligen Fünfeck zwei aufeinanderfolgenden Winkeln gegenüberliegen, teilen einander stetig; und ihre größeren Abschnitte sind der Fünfeckseite gleich.
2. Man beweise, dass $\sqrt{5}$ irrational ist.

4 Geometrische Konstruktionen und Probleme

Von Johannes Kepler (1571-1630) stammt die Aussage:

- Die Geometrie birgt zwei große Schätze: der eine ist der Satz von Pythagoras, der andere der Goldene Schnitt. Den ersten können wir mit einem Scheffel Gold vergleichen, den zweiten können wir ein kostbares Juwel nennen.

4.1 Das goldene Dreieck

Wir sagen, ein gleichschenkliges Dreieck sei ein *goldenes Dreieck*, wenn sich die Länge eines Schenkels zur Länge der Grundseite wie $\phi : 1$ verhält. Mit elementarer Trigonometrie erhalten wir hieraus, dass die Basiswinkel $2\pi/5$ bzw. $72°$ sind, während der Winkel an der Spitze $\pi/5$ bzw. $36°$ ist. Denn (siehe Abbildung 18 links) es ist

$$\sin\alpha = \frac{h}{\phi} = \frac{\sqrt{\phi^2 - 1/4}}{\phi} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}(5+\sqrt{5})} = \sin\frac{2\pi}{5}.$$

In Abbildung 18 rechts stellen wir ein goldenes Dreieck $\triangle ABC$ dar. Der Schenkel AC sei in D nach dem goldenen Schnitt geteilt, wobei AD die größere Strecke sei. Dann

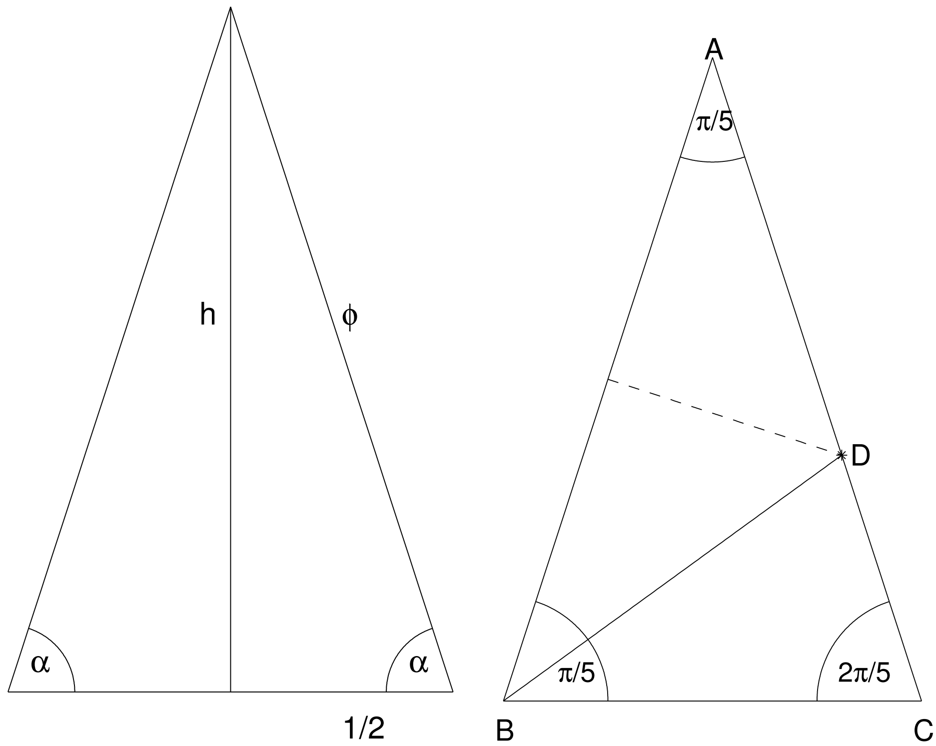

Abbildung 18: Das goldene Dreieck

ist $\triangle BDC$ wieder ein goldenes Dreieck. Denn es ist (zumindestens analytisch) nicht schwierig nachzuweisen, dass $|BD| = |BC$, also $\triangle BDC$ gleichschenklig ist, und das Verhälnis zwischen $|BD|$ und $|DC|$ gerade ϕ ist. Ferner ist auch das Dreieck $\triangle ABD$ gleichschenklig mit dem Basiswinkel $\pi/5$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\text{Fläche}(\triangle ABC) &= \frac{|BC|^2}{2}\phi \sin\frac{2\pi}{5}, \\
\text{Fläche}(\triangle ABD) &= \frac{|BC|^2}{2}\phi \sin\frac{\pi}{5}, \\
\text{Fläche}(\triangle DBC) &= \frac{|BC|^2}{2\phi} \sin\frac{2\pi}{5}.
\end{aligned}$$

Daher ist

$$\frac{\text{Fläche}(\triangle ABC)}{\text{Fläche}(\triangle ABD)} = \frac{\sin(2\pi/5)}{\sin(\pi/5)} = \phi, \qquad \frac{\text{Fläche}(\triangle ABD)}{\text{Fläche}(\triangle DBC)} = \frac{\phi^2 \sin(\pi/5)}{\sin(2\pi/5)} = \phi.$$

Insgesamt ist daher

$$\frac{\text{Fläche}(\triangle ABC)}{\text{Fläche}(\triangle ABD)} = \phi = \frac{\text{Fläche}(\triangle ABD)}{\text{Fläche}(\triangle DBC)}.$$

Etwas lax kann man also sagen, dass das goldene Dreieck $\triangle ABC$ durch das Dreieck $\triangle ABD$ nach dem goldenen Schnitt geteilt wird.

Das goldene Dreieck kommt implizit schon bei Euklid (IV, 10) vor. Denn dort findet man die Aufgabe:

- Errichte ein gleichschenkliges Dreieck, in dem jeder der beiden Winkel an der Grundlinie doppelt so groß ist wie der letzte Winkel.

4.2 Das 3-4-5-Dreieck

Ein Dreieck, dessen Seiten die Längen 3, 4 und 5 haben, enthält sozusagen seit Pythagoras einen rechten Winkel. Sei also $\triangle ABC$ ein Dreieck mit $|BC| = 3$, $|AB| = 4$ und $|AC| = 5$. Sei O Schnittpunkt der Winkelhalbierenden $\sphericalangle ACB$ und der Strecke AB. Um O schlage man einen Kreis mit dem Radius $|OB|$ und gewinne, wie in Abbildung 19 angegeben, die Punkte P und Q. Ferner sei D ein Punkt auf AC mit $|DC| = |BC|$.

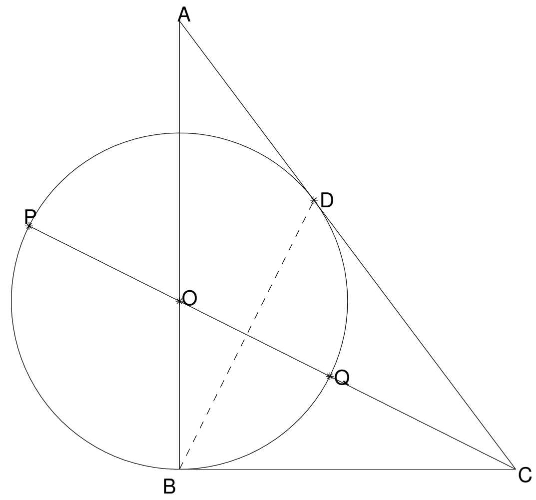

Abbildung 19: Das 3-4-5-Dreieck

Wir wollen uns überlegen:

- In Q wird die Strecke CP nach dem goldenen Schnitt geteilt. Ferner ist

$$\frac{|BC|}{|BO|} = \frac{2}{1}, \qquad \frac{|DC|}{|AD|} = \frac{3}{2}, \qquad \frac{|AO|}{|OB|} = \frac{5}{3}, \qquad \frac{|AB|}{|BO|} = \frac{8}{5}.$$

  Hier schauen die Fibonacci-Zahlen schon um die Ecke!

Ein analytischer Beweis ist nicht schwierig. Es sei $A = (0, 4)$, $B = (0, 0)$ und $C = (3, 0)$. Dann ist $O = (0, 3/2)$, $P = (-3/\sqrt{5}, (3/2)(1 + 1/\sqrt{5}))$, $Q = (3/\sqrt{5}, (3/2)(1 - 1/\sqrt{5}))$ und $D = (6/5, 12/5)$. Dann ist (wir benutzen hierzu Maple)

$$|CP| = \frac{3}{2}(1 + \sqrt{5}), \qquad |PQ| = 3.$$

Also ist $|CP|/|PQ| = \phi$, womit die erste Behauptung bewiesen ist. Wegen $|BC| = 3$ und $|BO| = 3/2$ ist $|BC|/|BO| = 2/1$. Weiter ist $|DC| = 3$, $|AD| = 2$, daher $|DC|/|AD| = 3/2$. Es ist $|AO| = 5/2$, $|OB| = 3/2$, folglich $|AO|/|OB| = 5/3$. Schließlich ist $|AB| = 4$, $|BO| = 3/2$, also $|AB|/|BO| = 8/5$. Damit ist die Behauptung bewiesen.

4.3 Ein hübsches Problem

Gegeben sei ein beliebiges Rechteck $ABCD$. Wie hat man die Punkte P und Q auf DC bzw. CB zu legen, damit die Dreiecke $\triangle ADP$, $\triangle PCQ$ und $\triangle QAB$ gleichen Flächeninhalt haben?

Die Lösung (siehe auch A. Beutelspacher, B. Petri (1996, S. 71)) ist natürlich nicht schwierig. Mögen a, b, c, d die in Abbildung 20 ersichtliche Bedeutung haben. Als Flächeninhalte der jeweiligen Dreiecke erhält man

$$\begin{aligned} \text{Fläche}(\triangle ADP) &= \frac{1}{2}a(c+d), \\ \text{Fläche}(\triangle PCQ) &= \frac{1}{2}bd, \\ \text{Fläche}(\triangle QAB) &= \frac{1}{2}c(a+b). \end{aligned}$$

Als Flächeninhalte der jeweiligen Dreiecke erhält man

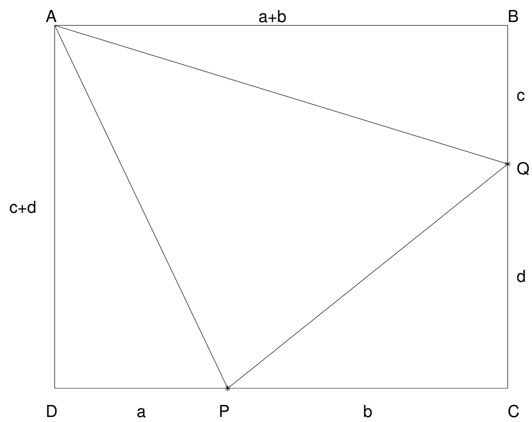

Abbildung 20: Wann haben $\triangle ADP$, $\triangle PCQ$ und $\triangle QAB$ gleichen Flächeninhalt?

$$\begin{aligned} \text{Fläche}(\triangle ADP) &= \frac{1}{2}a(c+d), \\ \text{Fläche}(\triangle PCQ) &= \frac{1}{2}bd, \\ \text{Fläche}(\triangle QAB) &= \frac{1}{2}c(a+b). \end{aligned}$$

Die Flächeninhalte sind also gleich, wenn

$$a(c+d) = bd = c(a+b)$$

ist, woraus man insbesondere $bc = ad$ erhält. Eliminiert man hieraus a, so folgt durch Einsetzen

$$\frac{bc}{d}(c+d) = bd \qquad \text{bzw.} \qquad \left(\frac{d}{c}\right)^2 - \frac{d}{c} = 1.$$

Folglich ist $d/c = \phi$. Ähnlich folgt $b/a = \phi$. Das Problem wird also dadurch gelöst, dass man BC und CD nach dem goldenen Schnitt teilt.

4.4 Das Fünf-Kreise-Problem

Gegeben sei ein Kreis mit dem Mittelpunkt O. Man konstruiere das zugehörige regelmäßige Fünfeck. Durch je zwei benachbarte Ecken dieses Fünfecks und den Kreismittelpunkt lege man jeweils einen Kreis, also fünf Kreise (siehe Abbildung 21 links). Wie verhält sich der Radius des gegebenen Kreises zu den Radien der so konstruierten

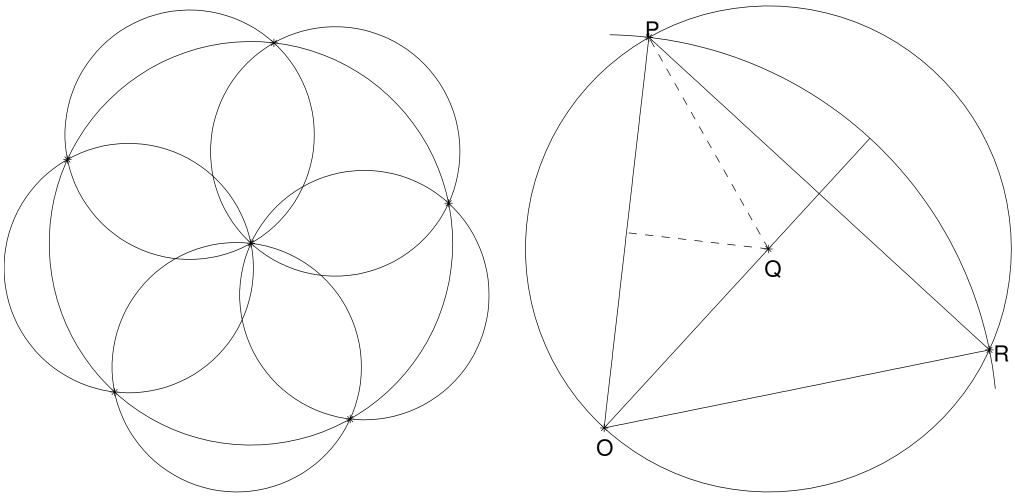

Abbildung 21: Das Fünf-Kreise-Problem

Kreise?

Wir haben den Radius der konstruierten Kreise zu berechnen. Seien P, R aufeinanderfolgende Ecken in dem einem Kreis um O einbeschriebenen regelmäßigen Fünfeck, siehe Abbildung 21 rechts. Dann ist

$$\frac{|OP|}{2} = |OQ| \cos\frac{\pi}{5}$$

Daher ist

$$\frac{|OP|}{|OQ|} = 2\cos\frac{\pi}{5} = \phi.$$

Die Radien der entsprechenden Kreise stehen also im goldenen-Schnitt-Verhältnis zueinander.

4.5 Die goldene Spirale

Unter einem *goldenen Rechteck* versteht man ein Rechteck, dessen Seiten im goldenen-Schnitt-Verhältnis zueinander stehen. Die Beziehung $\phi = 1 + 1/\phi$ zeigt, dass man ein goldenes Rechteck in zwei Teile zerlegen kann, nämlich ein Quadrat und ein kleineres goldenes Rechteck. Geht man umgekehrt (wir folgen in der Notation der Darstellung bei H. S. M. Coxeter (1969, S. 164 ff.) bzw. A. Beutelspacher, B. Petri (1996, S. 57 ff.)) von einem Quadrat $ABCH$ aus, so kann man hierzu das goldene Rechteck $ABDF$ konstruieren. Das Rechteck $CDFH$ ist wieder ein goldenes Rechteck, welches wieder in das Quadrat $CDEJ$ und das goldene Rechteck $JEFH$ zerlegt werden kann,

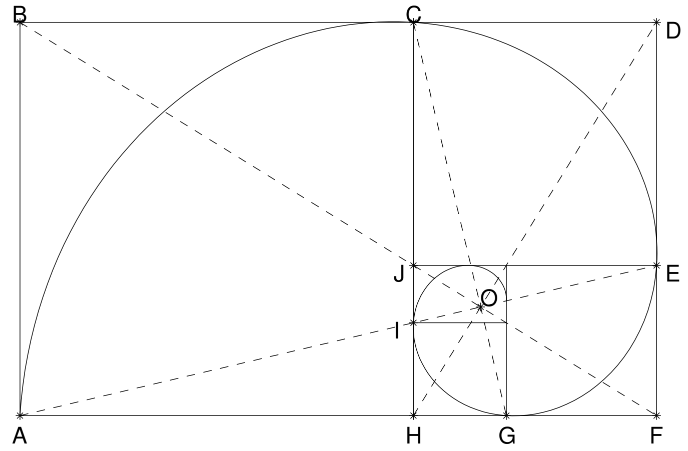

Abbildung 22: Goldenes Rechteck und goldene Spirale

siehe Abbildung 22. Sei O der Schnittpunkt von AE und BF (oder CG und HD)[16] In Abbildung 22 haben wir einen Teil S einer Spirale durch die Punkte A, C, E, G, I gezeichnet, die sogenannte goldene Spirale. Mit einem geeigneten Drehwinkel α (dieser ist gerade so bestimmt, dass $O + |OE|(\cos\alpha, \sin\alpha) = E$) ist

$$S = \{O + |OE|\,\phi^{2\theta/\pi}(\cos(\alpha+\theta), \sin(\alpha+\theta)) : \theta \in [-2\pi, \pi]\}.$$

Genauer wollen wir hierauf nicht eingehen, siehe A. Beutelspacher, B. Petri (1996, S. 57 ff) und H. S. M. Coxeter (1969, S. 164 ff.). Auf einer Schweizer Briefmarke[17] aus dem Jahr 1987 findet man die goldene Spirale.

4.6 Aufgaben

1. Man zeige: In ein gegebenes Quadrat kann man ein goldenes Rechteck so einbeschreiben (d. h. die Ecken des Rechtecks liegen auf unterschiedlichen Seiten des Quadrates), dass seine Ecken die Seiten des Quadrats im goldenen Schnitt teilen.

2. Gegeben sei ein Quader mit dem Volumen 1, eine Kantenlänge sei 1 und die Länge der Raumdiagonale sei 2. Man bestimme die beiden anderen Kantenlängen.

3. Man betrachte[18] Abbildung 23, in welcher einem Quadrat ein gleichschenkliges Dreieck einbeschrieben ist, wobei die Basis des Dreiecks eine Seite des Quadrats ist. Man

[16] Es ist einfach analytisch nachzuweisen, dass alle Geradenstücke AE, BF, CG und HD einen gemeinsamen Schnittpunkt haben. Ist $ABCH$ das Einheitsquadrat mit $A = (0,0)$, $B = (0,1)$, $C = (1,1)$ und $H = (1,0)$, so ist $O = (\frac{1}{2} + \frac{3}{10}\sqrt{5}, \frac{1}{2} - \frac{1}{10}\sqrt{5})$. In diesem Falle ist

$$|OE| = \frac{2}{\sqrt{5}}\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{1+\sqrt{5}}.$$

[17] Siehe
http://www.fh-friedberg.de/users/boergens/marken/beispiele/goldenerschnitt.htm

[18] Siehe A. Beutelspacher, B. Petri (1996, S. 73).

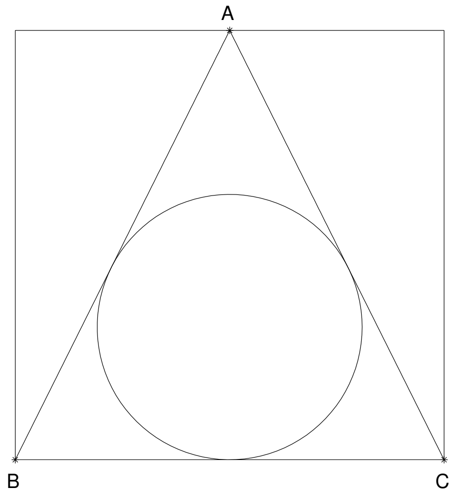

Abbildung 23: Quadrat, Dreieck, Inkreis

bestimme das Verhältnis aus der Länge der Basisseite und des Durchmessers des Inkreises.

5 Etwas Mathematik rund um ϕ

Die Goldene-Schnitt-Zahl ϕ spielt in der Mathematik an verschiedenen Stellen eine Rolle. Wir wollen nur einige Beispiele hierzu angeben.

5.1 Minimierung einer unimodalen Funktion

Eine Funktion $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt *unimodal*, wenn es genau ein $t^* \in (a, b)$ gibt mit $f(t^*) = \min_{t\in[a,b]} f(t)$, und wenn f auf $[a, t^*]$ monoton fallend und auf $[t^*, b]$ monoton wachsend ist. Das Ziel besteht darin, das unbekannte Minimum möglichst gut zu lokalisieren, wobei allerdings möglichst wenig Funktionsauswertungen vorzunehmen sind, weil diese "teuer" sein können.

Angenommen, man wertet die unimodale Funktion f an zwei Punkten $s, t \in [a, b]$ mit $s < t$ aus. Ist $f(s) > f(t)$, so können s und t nicht beide rechts von t^* liegen, da f auf $[t^*, b]$ monoton wachsend ist. Daher muss s links von t^* liegen und man sucht t^* jetzt in dem reduzierten Intervall $[s, b]$. Ist dagegen $f(s) \leq f(t)$, so können s und t nicht beide links von t^* liegen, so dass man sich bei der Suche nach t^* auf das Intervall $[a, t]$ beschränken kann. Nun geben wir die *Methode des goldenen Schnitts* zur Minimierung einer unimodalen Funktion f an. Hierbei wird zu Beginn das Intervall $[a, b]$ in $s < t$ nach dem goldenen Schnitt geteilt, die Funktion f in den beiden Punkten ausgewertet und danach entschieden, ob in $[a, t]$ oder in $[s, b]$ weiter gesucht wird. Dieses neue Intervall wird wieder nach dem goldenen Schnitt geteilt, wobei einer der beiden Punkte und insbesondere sein Funktionswert schon bekannt ist.

- Die Funktion $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sei auf $[a, b]$ unimodal.

- Sei $\epsilon > 0$ (gewünschte Genauigkeit) gegeben, setze $F := 1/\phi = (\sqrt{5}-1)/2$.
- Berechne $\left\{ \begin{array}{lcllcl} s & := & a + (1-F)(b-a), & f_s & := & f(s), \\ t & := & a + F(b-a), & f_t & := & f(t). \end{array} \right.$
- Solange $b - a > \epsilon$:
  - Falls $f_s > f_t$, dann:
  $$a := s, \quad s := t, \quad t := a + F(b-a), \quad f_s := f_t, \quad f_t := f(t)$$
  - Andernfalls:
  $$b := t, \quad t := s, \quad s := a + (1-F)(b-a), \quad f_t := f_s, \quad f_s := f(s).$$
- $t^* \approx (a+b)/2$.

Natürlich endet das Verfahren nach endlich vielen Schritten, da die Intervalllänge des "Ungewissheitsintervalls" von Schritt zu Schritt mit $1/\phi \approx 0.6180339890$ multipliziert wird.

5.2 Die Konvergenzgeschwindigkeit des Sekantenverfahrens

Wir zitieren den folgenden lokalen Konvergenzsatz für das Sekantenverfahren, siehe z. B. J. Werner (1992, S. 112).

- *Sei $f \in C^2[a,b]$ und $x^* \in (a,b)$ eine einfache Nullstelle von f, d. h. es sei $f(x^*) = 0$ und $f'(x^*) \neq 0$. Dann existiert ein $\delta > 0$ und hiermit ein Intervall*
  $$I_\delta := [x^* - \delta, x^* + \delta] \subset [a,b]$$
  mit: Sind x_0, $x_1 \in I_\delta$ mit $x_0 \neq x_1$, so ist die aus dem Sekantenverfahren
  $$x_{k+1} := x_k - \frac{(x_k - x_{k-1})f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})}, \qquad k = 1, 2, \ldots,$$
  gebildete Folge $\{x_k\}$ definiert und $\{x_k\} \subset I_\delta$ konvergent gegen x^*. Hierbei wird $x_k \neq x^*$ für alle k angenommen. Ferner existiert eine Nullfolge $\{c_k\} \subset \mathbb{R}_+$ positiver reeller Zahlen und eine Konstante $C > 0$ mit
  $$|x_k - x^*| \leq c_k \quad \text{und} \quad c_{k+1} \leq C c_k^\phi \quad \text{für } k = 0, 1, \ldots.$$

Auch hier spielt also überraschenderweise die Goldene-Schnitt-Zahl eine Rolle.

5.3 Die Anzahl der Schritte im euklidischen Algorithmus

Der euklidische Algorithmus zur Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers zweier natürlicher Zahlen dürfte bekannt sein. In MATLAB gibt es die Funktion `gcd`, wir scheiben eine eigene Funktion:

```
function [ggt,iter]=GGT(u,v);
%*************************************************
%Input:  u>v sind natuerliche Zahlen
%Output: ggt ist der groesste gemeinsame Teiler von u
%        und v, iter gibt die Anzahl der Iterationen
%        bzw. Divisionen im euklidischen Algorithmus an.
%*************************************************
iter=0;
while (v~=0)
     r=rem(u,v); %r=Rest von u/v
     u=v;
     v=r;
     iter=iter+1;
end;
ggt=u;
```

Hier wird also nicht nur der größte gemeinsame Teiler, sondern auch die hierfür benötigte Anzahl der Schritte ausgegeben.

Beispiel: `[ggt,iter]=GGT(40902,24140);` ergibt ggt $= 34$ und iter $= 8$. □

Über die Anzahl der benötigten Schritte kann man eine Aussage machen (diese stammt von G. Lamé, 1845), bei der wieder die Goldene-Schnitt-Zahl ϕ vorkommt, siehe D. E. Knuth (1998, S. 348):

- Sind $u > v$ natürliche Zahlen, die kleiner als n sind, so ist die Zahl iter der durch den euklidischen Algorithmus benötigten Schritte abschätzbar durch

$$\text{iter} \le \frac{\ln n}{\ln \phi} + \frac{\ln \sqrt{5}}{\ln \phi} \approx 2.0781 \ln n + 1.6723 \approx 4.7850 \log_{10} n + 1.6723.$$

Beispiel: Für $(u, v) = (40902, 24140)$ würde dies z. B. die Abschätzung iter ≤ 23.7394 bzw. iter ≤ 23 liefern, also eine ziemlich schlechte Abschätzung. Anderseits benötigt man 39 Iterationen für $(u, v) = (165580141, 102334155)$. Obige Abschätzung würde iter ≤ 41 liefern, also eine ziemlich gute Abschätzung. Beachte, dass hier u und v aufeinanderfolgende Fibonacci-Zahlen sind. □

5.4 ϕ als geschachtelte Wurzel und als Kettenbruch

Wir betrachten eine Folge $\{x_k\}$, die für ein beliebiges $x_0 \ge 0$ durch die Vorschrift

$$x_{k+1} := \sqrt{1 + x_k}, \qquad k = 0, 1, \ldots,$$

gegeben ist. Der Kontraktionssatz liefert sofort die Aussage, dass die Folge $\{x_k\}$ für jedes $x_0 \ge 0$ gegen den eindeutigen Fixpunkt x^* von $F(x) := \sqrt{1+x}$ konvergiert. Offenbar ist $x^* = \phi$ die Goldene-Schnitt-Zahl. Es ist daher

$$\begin{aligned}
x_1 &= \sqrt{1+x_0}, \\
x_2 &= \sqrt{1+\sqrt{1+x_0}}, \\
x_3 &= \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+x_0}}}, \\
\vdots &\quad \vdots \\
\phi &= \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}},
\end{aligned}$$

eine Darstellung von ϕ als "geschachtelte Wurzel" (nested radical).

Nun betrachte man die Folge $\{x_k\}$, die durch

$$x_{k+1} := 1 + \frac{1}{x_k}, \qquad k = 0, 1, \ldots,$$

mit einem vorgegebenen $x_0 > 0$ gegeben ist. Wir wollen uns überlegen, dass auch diese Folge für jedes $x_0 > 0$ konvergiert, und zwar offenbar gegen ϕ. Hierzu definieren wir die Abbildung $F(x) := 1 + 1/x$. Offenbar ist $F((0,\infty)) \subset [1,\infty)$, $F([1,\infty)) \subset [1,2]$, $F([1,2]) \subset [\frac{3}{2}, 2]$ und $F([\frac{3}{2}, 2] \subset [\frac{3}{2}, 2]$. Für ein beliebiges $x_0 > 0$ ist also $x_k \in [\frac{3}{2}, 2]$ für alle $k \ge 3$. Da das abgeschlossene Intervall $[\frac{3}{2}, 2]$ durch F kontrahierend in sich abgebildet wird, folgt die behauptete Konvergenzaussage. Mit $x_0 := 1$ erhalten wir

$$x_1 = 1 + \frac{1}{1} = \frac{2}{1}, \quad x_2 = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}} = \frac{3}{2}, \quad x_3 = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}} = \frac{5}{3},$$

und

$$x_4 = \frac{8}{5}, \quad x_5 = \frac{13}{8}, \ldots.$$

Auch hier wird der Zusammenhang zwischen der Goldenen-Schnitt-Zahl ϕ und den sogenannten Fibonacci-Zahlen $\{f_k\}$, die durch

$$f_0 := 0, \quad f_1 := 1, \quad f_k := f_{k-1} + f_{k-2} \quad (k = 2, \ldots)$$

definiert sind, deutlich. Durch vollständige Induktion nach k erhält man

$$x_{k-1} = \frac{f_{k+1}}{f_k}, \quad k \in \mathbb{N},$$

womit

$$\lim_{k\to\infty} \frac{f_{k+1}}{f_k} = \phi$$

bewiesen ist. Daher kann ϕ als unendlicher Kettenbruch dargestellt werden:

$$\phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}$$

Dies ist daher sozusagen der einfachste Kettenbruch, da nur Einsen auftreten. Weiter kann man hieraus schließen, dass ϕ die "irrationalste" Zahl (most irrational number: Bei Google ergibt die Suche nach diesem Begriff 83 700 Treffer) ist. Wir zitieren den *Approximationssatz von Hurwitz* und verweisen auf die schöne, elementare Darstellung bei Beutelspacher, B. Petri (1996, S. 99–105).

- Zu einer beliebigen Zahl $\xi \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ gibt es unendlich viele rationale Zahlen $p/q \in \mathbb{Q}$ mit der Eigenschaft
$$\left|\frac{p}{q} - \xi\right| < \frac{1}{q^2\sqrt{5}}.$$
Die Konstante $\sqrt{5}$ ist im folgenden Sinne die bestmögliche: Zu jedem $A > \sqrt{5}$ hat die Ungleichung
$$\left|\frac{p}{q} - \phi\right| < \frac{1}{q^2 A}$$
nur endlich viele Lösungen $p/q \in \mathbb{Q}$.

5.5 Aufgaben

1. Etwas einfaches kann auch kompliziert ausgedrückt werden. Als Beispiel hierfür beweise man[19]: Es ist
$$\phi = \frac{13}{8} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}(2k+1)!}{(k+2)!\,k!\,4^{2k+3}}.$$
Hinweis: Man entwickle $f(x) := \sqrt{x}$ nach Taylor an der Stelle $a := 4$ und werte die Reihe für $x = 5$ aus.

6 Lösungen zu den Aufgaben

6.1 Aufgaben in Abschnitt 1

1. Man rechtfertige die folgende Konstruktion:
   - Gegeben sei eine Strecke AP.
   - Man errichte in P das Lot PC mit $|PC| = |AP|$.
   - Man bestimme den Mittelpunkt D der Strecke AP. Man bestimme den Schnittpunkt B des Kreises um D mit dem Radius $|DC|$ und der Verlängerung der Strecke AP über P hinaus.

[19]Siehe
`http://mathworld.wolfram.com/GoldenRatio.html`

- Die Strecke AB wird in P nach dem goldenen Schnitt geteilt.

In Abbildung 24 wird die Konstruktion verdeutlicht.

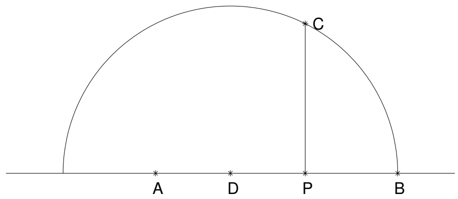

Abbildung 24: Konstruktion des "äußeren goldenen Schnitts"

Lösung: Es ist

$$|AB| = |AD| + |DB| = \frac{1}{2}|AP| + |DC| = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})|AP| = \phi\,|AP|,$$

und das war zu zeigen.

2. Man löse das sogenannte *Napoleonische Problem*. Bei diesem sind auf einem gegebenen Kreis um den Punkt O alleine mit Hilfe eines Zirkels vier Punkte A, B, C, D zu finden derart, dass $ABCD$ ein Quadrat bilden.

   Lösung: Man mache die folgende Konstruktion, siehe Abbildung 25.

   - Man wähle einen beliebigen Punkt A auf dem Kreis. Trage mit dem Radius des Kreises von A aus die Punkte F, G und C ab.
   - Sei E Schnittpunkt der Kreise um A und C jeweils mit dem Radius $|AG|$.
   - Es ist $|OE|$ die Seitenlänge des gesuchten Quadrates. Als Schnittpunkte des gegebenen Kreises und des Kreies um A mit dem Radius $|OE|$ gewinne man also die beiden übrigen Punkte B und D.

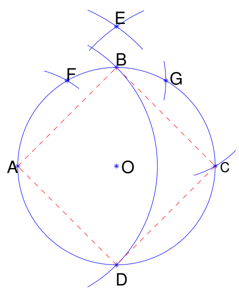

Abbildung 25: Lösung des Napoleonischen Problems

Nun muss die Konstruktion gerechtfertigt werden. Hierzu muss gezeigt werden, dass $|OE| = \sqrt{2}|AO|$. Es ist $|AG| = \sqrt{3}|AO|$. Wegen des Satzes von Pythagoras (angewandt auf $\triangle COE$) ist

$$|OE| = \sqrt{|EC|^2 - |OC|^2} = \sqrt{|AC|^2 - |AO|^2} = \sqrt{2}|AO|.$$

Das war zu zeigen.

3. Man betrachte die folgende Konstruktion (siehe K. Hofstetter (2002)):
   - Gegeben seien zwei Punkte A und B.
   - Seien C und D Schnittpunkte der beiden Kreise um A bzw. B, welche jeweils den Radius $|AB|$ haben.
   - Seien E und F Schnittpunkte der beiden Kreise mit der Geraden durch A und B.
   - Seien X und Y Schnittpunkte der beiden Kreise um A bzw. B, jeweils mit dem Radius $|EF|$.

   Siehe Abbildung 26 links.

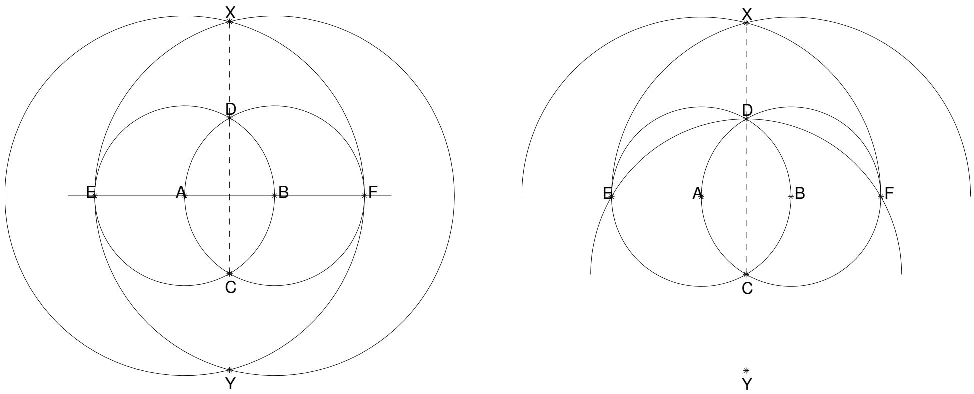

Abbildung 26: Konstruktion des goldenen Schnitts nach Hofstetter

   (a) Man zeige, dass die Strecke CX in D nach dem goldenen Schnitt geteilt wird.

   (b) Die Gerade durch A und B kann durch einen Kreis um C mit dem Radius $|CD|$ ersetzt werden, siehe Abbildung 26 rechts.

   Lösung: Wir geben eine analytische Lösung an und nehmen an, es sei $A = (0,0)$ und $B = (1,0)$ (was keine Einschränkung der Allgemeinheit ist). Dann ist $C = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{3})$, $D = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3})$. $E = (-1,0)$, $F = (2,0)$ (unabhängig davon, ob man (a) oder eine reine Zirkelkonstruktion betrachtet). Schließlich ist $X = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{15})$. Dann ist

$$\frac{|CX|}{|CD|} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{15} + \frac{1}{2}\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) = \phi,$$

   womit die Behauptung bewiesen ist.

6.2 Aufgaben in Abschnitt 2

1. Sei $\{f_k\}$ die Folge der Fibonacci-Zahlen, also $f_0 := 0$, $f_1 := 1$ und $f_k := f_{k-1} + f_{k-2}$, $k = 2, 3, \ldots$. Dann ist

$$f_{k+1}f_{k-1} - f_k^2 = (-1)^k, \qquad k = 1, 2, \ldots.$$

Lösung: Wir beweisen die Behauptung durch vollständige Induktion. Für $k = 1$ ist die Behauptung offensichtlich richtig. Wir nehmen an, sie sei für k richtig. Dann ist

$$\begin{aligned} f_{k+2}f_k - f_{k+1}^2 &= (f_{k+1} + f_k)f_k - f_{k+1}(f_k + f_{k-1}) \\ &= f_k^2 - f_{k+1}f_{k-1} \\ &= -(-1)^k \\ &\qquad \text{(nach Induktionsannahme)} \\ &= (-1)^{k+1}, \end{aligned}$$

womit die Behauptung bewiesen ist. Ein "esoterischer" Beweis ist bei D. E. KNUTH (1997, S. 81) angegeben. Hiernach beweist man zunächst die Identität

$$\begin{pmatrix} f_{k+1} & f_k \\ f_k & f_{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^k$$

durch vollständige Induktion nach k, anschließend bildet man auf beiden Seiten dieser Gleichung die Determinante.

Die obige Identität ist Grundlage eines Puzzles. Wir "beweisen", dass 168=169. Auf kariertem Papier zeichnen wir nämlich ein Rechteck, dessen Seiten die Längen 8 und 21 haben, dessen Flächeninhalt also $8 \cdot 21 = 168$ ist. In Abbildung 27 links ist dieses Rechteck angegeben, ferner ist angedeutet, wie es zu zerschneiden ist. Die Teile setze

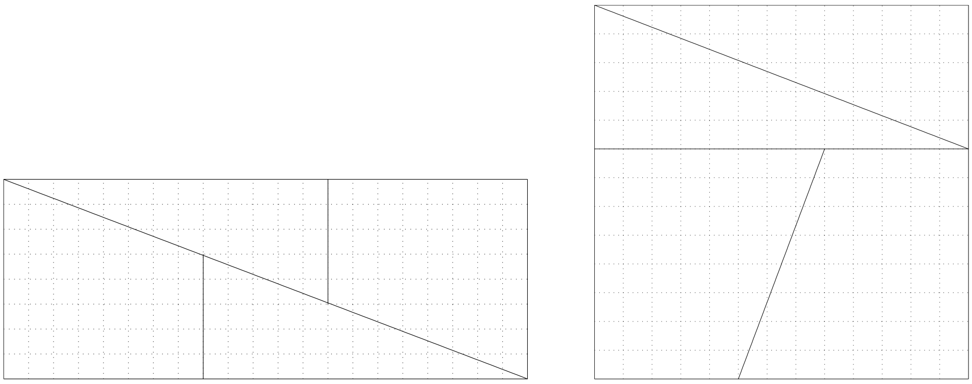

Abbildung 27: Zerschneiden eines Rechtecks, Zusammensetzen als Quadrat

man zu einem Quadrat der Seitenlänge 13 zusammen, siehe Abbildung 27 rechts. Dieses Quadrat hat den Flächeninhalt $13^2 = 169$. Damit ist 168=169 "bewiesen". Grundlage der optischen Täuchung ist die Gleichung $f_6 f_8 - f_7^2 = -1$, ein Spezialfall der obigen Gleichung.

2. Sei $\{f_k\}$ die Folge der Fibonacci-Zahlen, also $f_0 := 0$, $f_1 := 1$ und $f_k := f_{k-1} + f_{k-2}$, $k = 2, 3, \ldots$. Dann ist

$$\phi = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{f_k f_{k+1}}.$$

Lösung: Wir definieren $x_k := f_{k+2}/f_{k+1}$, $k = 0, 1, \ldots$, und benutzen, dass $\lim_{k\to\infty} x_k = \phi$. Mit Hilfe der letzten Aufgabe erhalten wir, dass

$$1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{f_k f_{k+1}} \quad = \quad 1 + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{f_{k+2}f_k - f_{k+1}^2}{f_k f_{k+1}} \right)$$

$$
\begin{aligned}
&= 1 + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{f_{k+2}}{f_{k+1}} - \frac{f_{k+1}}{f_k} \right) \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \\
&= 1 + (x_n - x_0) \\
&= 1 - \frac{f_2}{f_1} + x_n \\
&= x_n
\end{aligned}
$$

für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$. Hieraus folgt die Behauptung.

3. Sei $\{f_k\}$ die Folge der Fibonacci-Zahlen, also $f_0 := 0$, $f_1 := 1$ und $f_k := f_{k-1} + f_{k-2}$, $k = 2, 3, \ldots$. Man zeige:

   (a) Für $k = 0, 1, \ldots$ und $l \in \mathbb{N}$ ist $f_{k+l} = f_l f_{k+1} + f_{l-1} f_k$.

   (b) Es ist $f_{2k+1} = f_{k+1}^2 + f_k^2$, $k = 0, 1, \ldots$.

   (c) Es ist
   $$\sum_{j=0}^{k} f_j = f_{k+2} - 1, \qquad k = 0, 1, \ldots.$$

   (d) Es ist
   $$\sum_{j=0}^{k} f_j^2 f_{j+1} = \frac{f_k f_{k+1} f_{k+2}}{2}, \qquad k = 0, 1, \ldots.$$

   (e) Es ist
   $$\sum_{j=0}^{k} f_j f_{k-j} = \frac{1}{5}(k-1) f_k + \frac{2}{5} k f_{k-1}, \qquad k = 1, \ldots.$$

   (f) Es ist $(1 - \phi)^k = f_{k+1} - \phi f_k$, $k = 0, 1, \ldots$.

   Lösung: Zum Beweis des ersten Teiles der Aufgabe halten wir k fest und beweisen durch vollständige Induktion nach l, dass $f_{k+l} = f_l f_{k+1} + f_{l-1} f_k$ für alle $l \in \mathbb{N}$. Für $l = 1$ und $l = 2$ ist dies offensichtlich richtig. Angenommen, es sei für $l-1$ und l richtig. Dann ist

$$
\begin{aligned}
f_{k+l+1} &= f_{k+l} + f_{k+l-1} \\
&= f_l f_{k+1} + f_{l-1} f_k + f_{l-1} f_{k+1} + f_{l-2} f_k \\
&= (f_l + f_{l-1}) f_{k+1} + (f_{l-1} + f_{l-2}) f_k \\
&= f_{l+1} f_{k+1} + f_l f_k.
\end{aligned}
$$

   Damit ist der Induktionsbeweis abgeschlossen und der erste Teil der Aufgabe bewiesen.

   Zum Beweis des zweiten Teiles setze man im ersten Teil der Aufgabe $l := k + 1$.

   Den dritten Teil der Aufgabe beweisen wir durch vollständige Induktion nach k. Für $k = 0$ ist die Aussage offensichtlich richtig. Angenommen, sie sei für k richtig. Dann ist

$$\sum_{j=0}^{k+1} f_j = \sum_{j=0}^{k} f_j + f_{k+1}$$

$$
\begin{aligned}
&= f_{k+2} - 1 + f_{k+1} \\
&= f_{(k+1)+2} - 1,
\end{aligned}
$$

womit der Induktionsbeweis erfolgreich abgeschlossen ist.

Auch den vierten Teil der Aufgabe beweisen wir durch vollständige Induktion nach k, wobei der Induktionsanfang für $k = 0$ wieder trivialerweise gegeben ist. Die Aussage sei für k richtig. Dann ist

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{k+1} f_j^2 f_{j+1} &= \sum_{j=0}^{k} f_j^2 f_{j+1} + f_{k+1}^2 f_{k+2} \\
&= \frac{f_k f_{k+1} f_{k+2}}{2} + f_{k+1}^2 f_{k+2} \\
&= \frac{(f_{k+2} - f_{k+1}) f_{k+1} f_{k+2}}{2} + f_{k+1}^2 f_{k+2} \\
&= \frac{f_{k+1} f_{k+2} (f_{k+1} + f_{k+2})}{2} \\
&= \frac{f_{k+1} f_{k+2} f_{k+3}}{2},
\end{aligned}
$$

also ist die Aussage auch für $k + 1$ richtig.

Die fünfte Aussage wird ebenfalls durch vollständige Induktion nach k bewiesen. Die Aussage ist für $k = 1$ und $k = 2$ offensichtlich richtig. Angenommen, sie sei es auch für ein $k \geq 2$. Dann ist

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{k+1} f_j f_{k+1-j} &= \sum_{j=0}^{k} f_j f_{k+1-j} \\
&= \sum_{j=0}^{k-1} f_j f_{k+1-j} + f_k \\
&= \sum_{j=0}^{k-1} f_j (f_{k-j} + f_{k-1-j}) + f_k \\
&= \sum_{j=0}^{k} f_j f_{k-j} + \sum_{j=0}^{k-1} f_j f_{k-1-j} + f_k \\
&= \frac{1}{5}(k-1) f_k + \frac{2}{5} k f_{k-1} + \frac{1}{5}(k-2) f_{k-1} + \frac{2}{5}(k-1) f_{k-2} + f_k \\
&= \frac{1}{5}(k-1) f_k + \frac{2}{5} k f_{k-1} + \frac{1}{5}(k-2) f_{k-1} + \frac{2}{5}(k-1)(f_k - f_{k-1}) + f_k \\
&= \left(\frac{3}{5} k + \frac{2}{5}\right) f_k + \frac{1}{5} k f_{k-1} \\
&= \frac{1}{5} k (f_{k-1} + f_k) + \frac{2}{5}(k+1) f_k \\
&= \frac{1}{5} k f_{k+1} + \frac{2}{5}(k+1) f_k,
\end{aligned}
$$

womit der Induktionsbeweis abgeschlossen ist.

Auch die sechste Aussage wird durch vollständige Induktion nach k bewiesen. Für $k = 0$ ist sie trivialerweise richtig. Angenommen, sie sei für k richtig. Dann ist

$$\begin{aligned}(1-\phi)^{k+1} &= (1-\phi)^k(1-\phi)\\ &= (f_{k+1}-\phi f_k)(1-\phi)\\ &= f_{k+1}-\phi f_k-\phi f_{k+1}+\phi^2 f_k\\ &= f_k+f_{k+1}-\phi f_{k+1}\\ &= f_{k+2}-\phi f_{k+1},\end{aligned}$$

und das ist die Aussage für $k+1$.

4. Sei

$$A_k := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{k\times k}.$$

Man berechne $\det(A_k)$.

Lösung: Es ist $\det(A_1) = 1$ und

$$\det(A_2) = \det\begin{pmatrix} 1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix} = 2.$$

Durch Entwicklung von $\det(A_k)$ nach der ersten Zeile erhält man ferner $\det(A_k) = \det(A_{k-1}) + \det(A_{k-2})$, so dass $\det(A_k) = f_{k+1}$.

5. Sei $\{f_k\}$ die Folge der Fibonacci-Zahlen, also $f_0 := 0$, $f_1 := 1$ und $f_k := f_{k-1} + f_{k-2}$, $k = 2, 3, \ldots$. Dann ist

$$\sum_{j=0}^{k} f_j x^j = \begin{cases} \dfrac{f_{k+1}x^{k+1} + f_k x^{k+2} - x}{x^2+x-1}, & x^2+x-1 \neq 0,\\[2ex] \dfrac{(k+1)f_{k+1}x^k + (k+2)f_k x^{k+1} - 1}{2x+1}, & x^2+x-1 = 0,\end{cases} \qquad k = 0, 1, \ldots.$$

Lösung: Auch diese Aussage beweisen wir durch vollständige Induktion nach k. Für $k = 0$ ist sie offensichtlich richtig. Angenommen, sie sei es auch für k. Wir nehmen zunächst an, es sei $x^2 + x - 1 \neq 0$. Dann ist

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{k+1} f_j x^j &= \sum_{j=0}^{k} f_j x^j + f_{k+1}x^{k+1}\\ &= \frac{f_{k+1}x^{k+1} + f_k x^{k+2} - x}{x^2+x-1} + f_{k+1}x^{k+1}\\ &= \frac{f_{k+1}x^{k+1} + f_k x^{k+2} - x + (x^2+x-1)f_{k+1}x^{k+1}}{x^2+x-1} + f_{k+1}x^{k+1}\\ &= \frac{(f_k+f_{k+1})x^{k+2} + f_{k+1}x^{k+3} - x}{x^2+x-1}\\ &= \frac{f_{k+2}x^{k+2} + f_{k+1}x^{k+3} - x}{x^2+x-1}.\end{aligned}$$

Ist dagegen $x^2 + x - 1 = 0$, so ist $x = 1/\phi$ oder $x = 1/(1-\phi)$. Wegen

$$f_{k+1}\left(\frac{1}{\phi}\right)^{k+1} + f_k\left(\frac{1}{\phi}\right)^{k+2} - \frac{1}{\phi} = \frac{1}{\phi^{k+2}}[\underbrace{f_{k+1}\phi + f_k - \phi^{k+1}}_{=0}] = 0$$

und

$$\begin{aligned} f_{k+1}\left(\frac{1}{1-\phi}\right)^{k+1} + f_k\left(\frac{1}{1-\phi}\right)^{k+2} - \frac{1}{1-\phi} &= \frac{1}{(1-\phi)^{k+2}}[\underbrace{f_{k+2} - f_{k+1}\phi - (1-\phi)^{k+1}}_{=0}] \\ &= 0 \end{aligned}$$

(hierbei haben wir Aufgabe 3f benutzt) ergibt eine Anwendung der Regel von de l'Hospital, dass

$$\sum_{j=0}^{k} f_j x^k = \frac{(k+1)f_{k+1}x^k + (k+2)f_k x^{k+1} - 1}{2x+1},$$

falls $x^2 + x - 1 = 0$.

Ist $x^2 + x - 1 \neq 0$ und existiert $\sum_{j=0}^{\infty} f_j x^j$, so ist offenbar

$$\sum_{j=0}^{\infty} f_j x^j = \frac{x}{1-x-x^2} \qquad \text{bzw.} \qquad \sum_{j=0}^{\infty} f_{j+1} x^j = \frac{1}{1-x-x^2}.$$

6. Sei $\{f_k\}$ die Folge der Fibonacci-Zahlen, also $f_0 := 0$, $f_1 := 1$ und $f_k := f_{k-1} + f_{k-2}$, $k = 2, 3, \ldots$. Ferner sei die Folge $\{g_k\}$ definiert durch $g_0 := 2$, $g_1 := 1$ und $g_k := g_{k-1} + g_{k-2}$, $k = 2, 3, \ldots$. Man zeige:

   (a) Es ist $g_k = f_{k-1} + f_{k+1}$, $k = 1, 2, \ldots$.

   (b) Es ist $f_{2k} = f_k g_k$, $k = 0, 1, \ldots$.

   Lösung: Beide Aussagen werden durch vollständige Induktion nach k bewiesen. Die erste ist für $k = 1, 2$ richtig. Wir nehmen an, die Aussage sei für k uns $k-1$ richtig. Dann ist

$$\begin{aligned} g_{k+1} &= g_k + g_{k-1} \\ &= f_{k-1} + f_{k+1} + f_{k-2} + f_k \\ &= (f_{k-1} + f_{k-2}) + (f_k + f_{k+1}) \\ &= f_k + f_{k+2}, \end{aligned}$$

   und das ist die Aussage für $k+1$.

   Die zweite Aussage ist für $k = 0, 1$ trivialerweise richtig. Angenommen, sie sei für k richtig. Dann erhält man unter Benutzung von Aufgabe 3b, des ersten, schon bewiesenen Teils dieser Aufgabe und der Induktionsvoraussetzung die folgende Gleichungskette:

$$\begin{aligned} f_{2(k+1)} &= f_{2k+1} + f_{2k} \\ &= f_k^2 + f_{k+1}^2 + f_k g_k \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= f_k^2 + f_{k+1}^2 + f_k(f_{k-1} + f_{k+1}) \\
&= f_k f_{k+1} + f_k(f_k + f_{k-1}) + f_{k+1}^2 \\
&= f_k f_{k+1} + f_{k+1}(f_k + f_{k+1}) \\
&= f_k f_{k+1} + f_{k+1} f_{k+2} \\
&= f_{k+1}(f_k + f_{k+2}) \\
&= f_{k+1} g_{k+1}.
\end{aligned}
$$

Damit ist auch die zweite Aussage bewiesen.

7. Allgemeiner als in Aufgabe 6 bezeichnet man eine Folge $\{a_k\}_{k=0,1,\ldots}$ als eine *Lucas-Folge*, wenn $a_k = a_{k-1} + a_{k-2}$, $k = 2, 3, \ldots$. Man zeige, dass

$$a_k = a_1 f_k + a_0 f_{k-1}, \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

wobei $\{f_k\}$ natürlich die Folge der Fibonacci-Zahlen ist.

Lösung: Die Aussage ist offenbar für $k = 1, 2$ richtig. Angenommen, sie sei auch für k richtig. Dann ist

$$
\begin{aligned}
a_{k+1} &= a_k + a_{k-1} \\
&= a_1 f_k + a_0 f_{k-1} + a_1 f_{k-1} + a_0 f_{k-2} \\
&= a_1(f_k + f_{k-1}) + a_0(f_{k-1} + f_{k-2}) \\
&= a_1 f_{k+1} + a_0 f_k,
\end{aligned}
$$

womit der Induktionsbeweis abgeschlossen ist.

8. Sei $\{a_k\}_{k=0,1,\ldots}$ eine Lucas-Folge, siehe Aufgabe 7, und $a_0 + a_1\phi \neq 0$. Dann ist

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \phi.$$

Lösung: Wegen Aufgabe 7 und $f_{k+1}/f_k \to \phi$ ist

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_1 f_{k+1} + a_0 f_k}{a_1 f_k + a_0 f_{k-1}} = \frac{f_k(a_0 + a_1 f_{k+1}/f_k)}{f_{k-1}(a_0 + a_1 f_k/f_{k-1})} \to \phi \frac{a_0 + a_1\phi}{a_0 + a_1\phi} = \phi,$$

womit die Aussage bewiesen ist.

6.3 Aufgaben in Abschnitt 3

1. Man gebe einen analytischen Beweis für die Aussage: Diagonalen, die im gleichseitigen und gleichwinkligen Fünfeck zwei aufeinanderfolgenden Winkeln gegenüberliegen, teilen einander stetig; und ihre größeren Abschnitte sind der Fünfeckseite gleich.

Lösung: Wir gehen o. B. d. A. von einem regulären Fünfeck mit Ecken in $A_k := e^{ik2\pi/5}$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$ aus, siehe Abbildung 28. Mit Hilfe von *Mathematica* und

```
Solve[{(1-t)*Cos[8*Pi/5]+t*Cos[2*Pi/5]==(1-s)*Cos[4*Pi/5]+s,
(1-t)*Sin[8*Pi/5]+t*Sin[2*Pi/5]==(1-s)*Sin[4*Pi/5]},{s,t}]
FullSimplify[%]
```

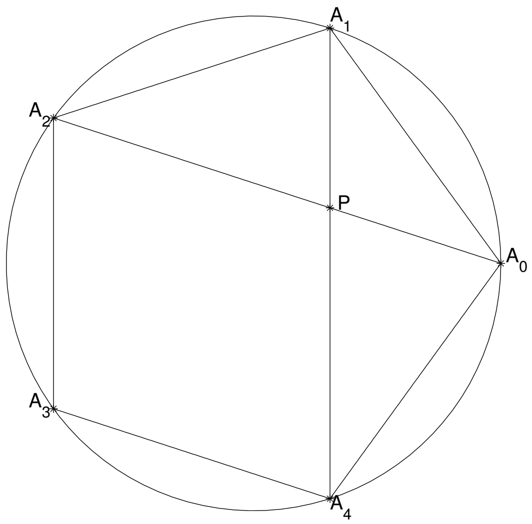

Abbildung 28: Schnitt der Diagonalen im regulären Fünfeck

erhalten wir, dass

$$s = t = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{5}) = \frac{1}{\phi}$$

und

$$P := (1-t)A_4 + tA_1 = (1-s)A_2 + sA_0$$

der gesuchte Schnittpunkt ist. Folglich ist

$$\frac{|A_1A_4|}{|PA_4|} = \frac{|A_1A_4|}{t\,|A_1A_4|} = \phi, \qquad \frac{|A_0A_2|}{|PA_2|} = \frac{|A_0A_2|}{s\,|A_0A_2|} = \phi.$$

Damit ist gezeigt, dass die Diagonalen im regulären Fünfeck sich nach dem goldenen Schnitt teilen. Ferner ist

$$|PA_4| = |A_0A_4| = \sqrt{\frac{1}{2}(5 - \sqrt{5})} = 2\sin\frac{\pi}{5}$$

gerade die Seitenlänge des dem Einheitskreis eingeschriebenen regelmäßigen Fünfecks.

2. Man beweise, dass $\sqrt{5}$ irrational ist.

   Lösung: Angenommen, es sei

   $$\sqrt{5} = \frac{p}{q},$$

   wobei $p, q \in \mathbb{N}$. Wir werden zeigen, dass es dann $p_1, q_1 \in \mathbb{N}$ mit $q_1 < q$ und $p/q = p_1/q_1$ gibt. Dies ergibt einen Widerspruch, da die selbe Argumentation auf die Darstellung $\sqrt{2} = p_1/q_1$ angewandt werden kann und jede natürliche Zahl nur endlich viele natürliche Vorgänger hat.

   Wir setzen $p_1 := -2p + 5q$, $q_1 := p - 2q$. Es ist $p_1 > 0$ bzw. $p_1 \in \mathbb{N}$, da $5/2 > \sqrt{5}$, und $q_1 > 0$ bzw. $q_1 \in \mathbb{N}$, da $\sqrt{5} > 2$. Weiter ist $q_1 < q$, da $\sqrt{5} < 3$. Wegen $5q^2 = p^2$ ist ferner $p_1/q_1 = p/q$, womit der Beweis abgeschlossen ist.

6.4 Aufgaben in Abschnitt 4

1. Man zeige: In ein gegebenes Quadrat kann man ein goldenes Rechteck so einbeschreiben (d. h. die Ecken des Rechtecks liegen auf unterschiedlichen Seiten des Quadrates), dass seine Ecken die Seiten des Quadrats im goldenen Schnitt teilen.

   Lösung: Gegeben sei ein Quadrat ABCD, siehe Abbildung 29. Man teile die Seiten des

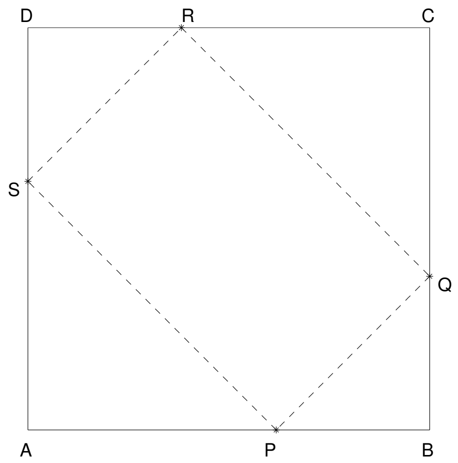

Abbildung 29: Ein einem Quadrat einbeschriebenes goldenes Rechteck

   Quadrats in der in Abbildung 29 angegebenen Weise nach dem goldenen Schnitt und gewinne hierdurch die Punkte P, Q, R und S. Ist $ABCD$ das Einheitsquadrat $[0, 1]^2$, was wir ohne Einschränkung annehmen können, so ist

$$P = (1/\phi, 0), \quad Q = (1, 1 - 1/\phi), \quad R = (1 - 1/\phi, 1), \quad S = (0, 1/\phi).$$

   Wegen $Q - P = R - S$ und $R - Q = S - P$ ist $PQRS$ ein Parallelogrann (gegenüberliegende Seiten sind parallel), wegen $(R - S)^T(P - S) = 0$ ist es ein Rechteck. Weiter ist

$$\frac{|RQ|}{|PQ|} = \frac{\sqrt{2}/\phi}{\sqrt{2}(1 - 1/\phi)} = \phi,$$

   womit gezeigt ist, dass $PQRS$ ein goldenes Rechteck ist.

2. Gegeben sei ein Quader mit dem Volumen 1, eine Kantenlänge sei 1 und die Länge der Raumdiagonale sei 2. Man bestimme die beiden anderen Kantenlängen.

   Lösung: Die Kantenlängen des Quaders seien $a, b > 0$ und $c = 1$. Nach Voraussetzung ist $ab = 1$ und $\sqrt{a^2 + b^2 + 1} = 2$ bzw. $a^2 + b^2 = 3$. Als positive Lösungen erhält man $(a, b) = (\phi, 1/\phi)$ und natürlich auch $(a, b) = (1/\phi, \phi)$. Zumindestens eine Kantenlänge des gesuchten Quaders ist also die goldene Schnitt Zahl ϕ.

3. Man betrachte[20] Abbildung 30 links, in welcher einem Quadrat ein gleichschenkliges Dreieck einbeschrieben ist, wobei die Basis des Dreiecks eine Seite des Quadrats ist. Man bestimme das Verhältnis aus der Länge der Basisseite und des Durchmessers des Inkreises.

[20] Siehe A. Beutelspacher, B. Petri (1996, S. 73).

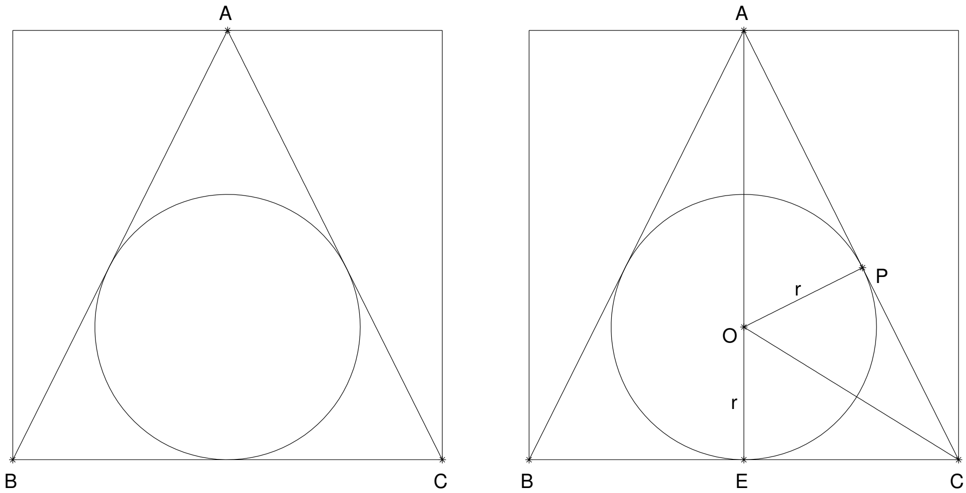

Abbildung 30: Quadrat, Dreieck, Inkreis

Lösung: Sei r der Radius des Inkreises, dessen Mittelpunkt wir mit O bezeichnen. Für die weiteren Bezeichnungen verweisen wir auf Abbildung 30 rechts. Das Dreieck $\triangle OPC$ hat bei P einen rechten Winkel. Da bei den beiden rechtwinkligen Dreiecken $\triangle OEC$ und $\triangle OPC$ zwei Seitenlängen gleich sind, müssen auch die dritten Seitenlängen übereinstimmen. Also ist $|PC| = |EC| = |BC|/2$. Hieraus folgt (Satz des Pythagoras, angewandt auf $\triangle AEC$)

$$|AP| = |AC| - |PC| = |AC| - |BC|/2 = \frac{|BC|}{2}(\sqrt{5}-1) = \frac{|BC|}{\phi}.$$

Nun wende man den Satz des Pythagoras auf $\triangle AOP$ an. Hiernach ist $r^2 + |AP|^2 = (|BC|-r)^2$, woraus man $|BC|(1-1/\phi^2) = 2r$ bzw. $|BC|/(2r) = \phi$ erhält. Das gesuchte Verhältnis ist also durch die goldene Schnitt Zahl gegeben.

6.5 Aufgaben in Abschnitt 5

1. Etwas einfaches kann auch kompliziert ausgedrückt werden. Als Beispiel hierfür beweise man[21]: Es ist

$$\phi = \frac{13}{8} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}(2k+1)!}{(k+2)!\,k!\,4^{2k+3}}.$$

Hinweis: Man entwickle $f(x) := \sqrt{x}$ nach Taylor an der Stelle $a := 4$ und werte die Reihe für $x = 5$ aus.

Lösung: Sei $f(x) := \sqrt{x}$. Durch vollständige Induktion nach k kann man leicht zeigen, dass

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k+1} 1 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (2k-3)}{2^k} x^{-(2k-1)/2}, \qquad k = 2, 3, \ldots.$$

[21] Siehe
`http://mathworld.wolfram.com/GoldenRatio.html`

Folglich ist

$$
\begin{aligned}
\phi &= \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(4)}{k!} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(f(4) + f'(4)) + \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty} \frac{f^{(k)}(4)}{k!} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(2 + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2^k k!} 1 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (2k-3) 2^{-(2k-1)} \\
&= \frac{13}{8} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2^{3k} k!} 1 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (2k-3) \\
&= \frac{13}{8} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2^{3(k+2)}(k+2)!} 1 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (2k+1) \\
&= \frac{13}{8} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2^{3(k+2)}(k+2)!} \frac{(2k+1)!}{2^k\, k!} \\
&= \frac{13}{8} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}(2k+1)!}{(k+2)!\, k!\, 4^{2k+3}}.
\end{aligned}
$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

Literatur

[1] A.Beutelspacher, B. Petri (1996) *Der Goldene Schnitt*. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg-Berlin-Oxford.

[2] H. S. M. Coxeter (1953) The golden section, phyllotaxis, and Wythoffs game. Scripts Math. 19, 135–143.

[3] H. S. M. Coxeter (1969) *Introduction to Geometry*. John Wiley, New York.

[4] O. Hagenmaier (1949) *Der goldene Schnitt: Ein Harmoniegesetz und seine Anwendung*. Werner Tapper-Verlag, Ulm.

[5] K. Hofstetter (2002) A simple construction of the golden section. Forum Geometricorum Volume 2, 65–66.

[6] D. E. Knuth (1997) *The Art of Computer Programming, Vol. 1: Fundamental Algorithms, 3rd ed.* Reading, MA: Addison-Wesley.

[7] D. E. Knuth (1998) *The Art of Computer Programming, Vol. 2: Seminumerical Algorithms, 3rd ed.* Reading, MA: Addison-Wesley.

[8] D. Laugwitz (1975) Die Quadratwurzel aus 5, die natürlichen Zahlen und der Goldene Schnitt. Jahrbuch Überblicke Mathematik 1975, 173–181.

[9] G. Odom (1983) Problem E 3007. American Mathematical Monthly 90, 482.

[10] Fra Luca Pacioli (1494) *Summa de Arithmetica Geometria Proportioni et Proportionalita*. Venedig.

[11] Fra Luca Pacioli (1509) *Divina Proportione*. Venedig.

[12] Frau Luca Pacioli (1889) *Divina Proportione. Die Lehre vom goldenen Schnitt*. Nach der venezianischen Ausgabe vom Jahre 1509. Neu herausgegeben, übersetzt und erläutert von Constantin Winterberg. Quellenschriften für Kunstgeschichte und Kunsttechnik des Mittelalters und der Neuzeit. Verlag Carl Graeser, Wien.

[13] B. Roselle (1999) A series representation for the golden mean. `http://home.cinci.rr.com/roselle/goldenmeanseries.htm`

[14] J. Werner (1992) *Numerische Mathematik 1.* Vieweg, Braunschweig-Wiesbaden.